בס"ד

דוגמאות הלכתיות לטעות בשימוש בהסתברות מותנה

בטור הקודם ניתחתי את הטיעון הפיסיקו-תיאולוגי על סמך נוסחת ההסתברות השלימה של בייס, ועמדתי על טעויות שנעשות בשימוש בהסתברויות מותנות הפוכות. בטור הזה אמשיך ואראה טעויות דומות שנעשות בשימוש בנוסחה זו בשתי דוגמאות בהלכה. עם המשועממים הסליחה. אני מקווה שבזאת אסיים את פסק הזמן ההסתברותי.

1. רוב בבי"ד: השאלה

לפני כמה חודשים שאל אותי מישהו את השאלה הבאה:

בעל **ספר החינוך** (ראה טור 67 ו-79) מסביר שהולכים אחר הרוב בבי"ד כי כשיש רוב לדעה מסוימת אז הסיכוי לכך שהיא הנכונה הוא גבוה יותר. משמעות הדבר היא שהסיכוי לפסוק נכון של הרבה דיינים גבוה מהסיכוי של דיין אחד, או של מעט יותר דיינים, לפסוק נכון. אם נניח שהסיכוי של דיין מומחה לפסוק נכון הוא p, שהוא כמובן שבר בין 0 ל-1. הסיכוי של n דיינים לפסוק נכון הוא p^n. כשמכפילים את הסיכויים (בהנחת אי תלות של צדק או טעות בין דיינים שונים), תמיד מקבלים תוצאה נמוכה יותר. זה סותר את ההסבר ההסתברותי שבדברי **החינוך**.

אבל זה אבסורד על פניו, שהרי בה במידה הסיכוי לטעות של הרבה דיינים נמוך מהסיכוי שמעט יותר מהם טועים או שאחד טועה. הסיכוי לטעות של דיין אחד הוא (1-p), שגם הוא שבר בין 0 ל-1, ולכן הסיכוי לטעות של n דיינים, שהוא $(1-p)^n$, ודאי נמוך יותר. אז מהי האמת? הסכמה של כמה דיינים משפרת הסיכוי לטעות או את הסיכוי לפסוק נכון?

הערה בשולי הדברים

הנחנו כאן במובלע אי תלות בין דעות הדיינים, שכן אם הדעות תלויות זו בזו (אחד משפיע על השני בצורה כלשהי) אז לא מוצדק להכפיל את הסיכויים של כל אחד מהם באחרים. כך למשל אם נטיל קובייה פעמיים בדיוק באותה צורה (אותה זווית ואותה מהירות התחלתית), מה הסיכוי שהיא תיפול פעמיים על 6? 1/6 כמובן (ולא 1/36). רק אם ההטלות לא תלויות יש להכפיל את הסיכויים כדי לקבל את הסיכוי לצמד.

די ברור שהנחת האי תלות בין הדיינים לא נכונה כפשוטה (כי בבי"ד הם דנים ומתווכחים ומעבירים נימוקים בין כולם). לצורך הפשטות (עניינו כאן הוא בהדגמה של רעיון ולא בבירור דין רוב בבי"ד) נניח כאן בכל זאת אי תלות, כלומר שכל דיין מבית הדין מגבש את עמדתו לבד. במצב כזה סביר להניח שהסיכוי של n דיינים לטעות או לצדוק הוא אכן מכפלת הסיכויים (גם על זה יש לפלפל טובא, אבל כאמור זה לא חשוב).

2. קביעת וסתות: השאלה

אותו יהודי שאל אותי שאלה נוספת, וכפי שנראה להלן התשובה אליה דומה. בהלכה קובעים את הווסת של אישה (מתי יש לה מחזור) לפי ראיות. אם היא רואה דם במרווחי זמן קבועים שלוש פעמים, אז המסקנה היא שהפיזיולוגיה שלה היא קבועה (כלומר שאצלה יש מרווח קבוע בין הראיות), ואז עליה לחשוש שתראה דם גם במועד שאחרי המרווח הבא. לכן חכמים אסרו עליה לקיים במועד זה יחסי אישות (להלכה איסור וסתות הוא מדרבנן). לדוגמה, נניח שאישה ראתה דם שלוש פעמים במרווח של 29 ימים בין פעם לפעם, אז ביום ה-29 הבא אחרי הפעם השלישית עליה לחשוש שתראה ולהימנע מקיום יחסי אישות.

כעת נניח שלוש הנחות:

1. ידוע רפואית שהמרווחים של נשים נעים בין 28 ימים לבין 31 ימים, כלומר יש ארבעה סוגי מרווחים.
2. נניח שלאישה בימינו (פעם זה היה הרבה פחות) יש מחזור פעיל במשך כארבעים שנה, כלומר כחמש מאות חודשים.

3. עוד נניח שהמרווחים מתפלגים אחיד (הסיכוי למרווח של 28 או 29 או 30 או 31 יום הוא אותו סיכוי).

כעת נשאל: מה הסיכוי לקבל באופן מקרי שלושה מרווחים שווים בתקופה הזאת? התשובה היא 1/16. למה? נניח שהמרווח הראשון היה 29 ימים. הסיכוי שהבא אחריו יהיה גם הוא 29 ימים הוא 1/4, והסיכוי שגם הבא אחריו יהיה 29 ימים גם הוא 1/4. לכן הסיכוי לשלושה מרווחים שווים ברציפות הוא 1/16. שוב, זה בהנחה של אי תלות. אם יש תלות אז כמובן הסיכוי שכל המרווחים הם שווים גדל מאד. אם התלות היא גמורה, כלומר אם באמת יש לאישה מחזור קבוע אז הסיכוי הוא 1.

בכל אופן, גם אם לאישה אין מחזור קבוע, במהלך 500 פעמים לאורך החיים ברור שיהיו לא מעט שלשות כאלה של מרווחים קבועים (בממוצע כשלושים: 500/16). אז למה ההלכה מחליטה אחרי שלוש פעמים של אותו מרווח שיש לה וסת קבוע? בה במידה זו יכולה להיות תוצאה מקרית.

1. רוב בבי"ד: ההסבר

ראשית, מבט נוסף מעלה שהתמונה שתוארה בשאלה לא יכולה להיות נכונה. הסיכוי שאוסף של n דיינים טועה + הסיכוי שהאוסף הזה צודק חייב להיות 1. אבל לא נכון ש- $p^n + (1-p)^n = 1$. בעצם זה לא מתקיים כמעט אף פעם (למעט המקרים שבהם p=0,1). איך ייתכן שהסכום של שתי ההסתברויות הללו אינו 1? טוב, כאן כמובן יש אפשרות שתהיה התפלגות דעות בבי"ד ולא כולם יחליטו פה אחד.

כדי לנתח את המקרה, הבה נניח שמדובר במחלוקת ממונית בין ראובן לשמעון. שמעון תובע את ראובן, ובפני ביה"ד עולות שתי אפשרויות (B_k) שהוא אמור להכריע ביניהן: או שראובן חייב (B_1, ובקיצור 1) או שראובן פטור (B_0, ובקיצור 0).

נתון לנו שהסיכוי של דיין לטעות הוא 1-p ולהיות צודק p. נניח לצורך הפשטות שהסיכוי לטעות לשני הכיוונים (לזכות את החייב או לחייב את הזכאי) הוא שווה. חשוב להבין שהסיכוי של דיין לטעות (וכן להיות צודק) הוא בעצם הסתברות מותנה: הסיכוי שהדיין יאמר שקרה 1 (או 0) בהינתן שקרה 0 (או 1).

כעת נתון לנו האירוע A, שהוא: שני דיינים אומרים שראובן חייב ואחד אומר שהוא פטור. השאלה היא, בהנחה שזוהי הכרעת הדיינים מה נכון יותר להחליט: שראובן אכן חייב (כדעת הרוב) או שראובן פטור.

כאמור, בעל **החינוך** אומר שהולכים אחר הרוב כי הם בד"כ צודקים. רוב הסיכויים שהשניים צודקים והאחד טועה ולא ההיפך. מדוע זה נכון? הרי הסיכוי ששניים צודקים הוא p^2, והוא קטן מהסיכוי שאחד צודק p. אבל כפי שראינו גם ההיפך נכון, הסיכוי ששניים טועים $(1-p)^2$ קטן מהסיכוי שאחד טועה (1-p). אז מהי האמת. כאמור, שני הסיכויים הללו לא מסתכמים ל-1.

זה מחזיר אותנו לטור הקודם. ההסתברויות שמופיעות כאן הן הסתברויות מותנות לא מנורמלות, ואין פלא שהן לא מסתכמות ל-1. זהו בדיוק רמז לפתרון החידה שלנו. אנחנו מחפשים את ההסתברות המותנה ההפוכה: אם הדיינים החליטו משהו מה הסיכוי שזוהי האמת. כפי שראינו גם בטור הקודם, הסיכוי שזו האמת והסיכוי שלא חייבים להסתכם ל-1.

אנחנו יודעים לחשב את הסיכוי לכך ש-A יקרה בהנחה שראובן באמת חייב ובהנחה שהוא באמת פטור. כאמור לצורך הפשטות אנחנו מניחים אי תלות בין הטעויות של הדיינים (דומני שבמקרים הסבירים התוצאות לגבי שאלתנו, האם הרוב אכן צודק, לא באמת תלויות בזה).

אם המציאות היא שראובן באמת חייב (1), החלטה A פירושה ששני דיינים צדקו ואחד טעה. מה הסיכוי לזה? כמובן: $P(A/1)=p^2(1-p)$. ואם המציאות היא שראובן פטור (0), אזי שני דיינים טעו ואחד צדק. הסיכוי לזה הוא: $P(A/0)=p(1-p)^2$.

כבר כאן אפשר לראות את הטעות בשאלה. הסיכויים לטעות ולהכרעה נכונה צריכים להיבחן על ידי השוואה בין שני אלה ולא השוואה בין מספר דיינים גדול וקטן, כלומר בין p^2 לעומת p או בין $(1-p)^2$ לעומת (1-p).

אבל פתרון הבעיה שלנו יסודו בהשוואה בין שתי ההסתברויות המותנות ההפוכות: P(1/A) (שהוא הסיכוי שאם הדיינים הכריעו כך אז ראובן באמת חייב) מול P(0/A) (הסיכוי שאם הדיינים הכריעו כך ראובן פטור). כלומר אנחנו צריכים את ההסתברויות המותנות ההפוכות.

כדי לחשב אותן עלינו להשתמש בנוסחת בייס שפגשנו בטור הקודם (היא הופכת את כיוון ההתנייה):

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}.$$

כדי לדעת תוצאה מספרית עלינו לדעת מה הסיכוי האפריורי המוחלט לכך שראובן באמת חייב P(1) או פטור P(0), ואת זה אנחנו כמובן לא יודעים. מכיון שיש לנו רק שני מקרים (או שראובן חייב או שהוא פטור), אזי ניתן לסמן: $P(B_1)=q$, $P(B_2)=1-q$.

כעת נקבל מנוסחת בייס עבור ההסתברות שהאמת היא 1 (ראובן חייב):

$$P(1/A)=P(A/1)q \;/\; \{ p^2(1-p)q + p(1-p)^2 (1-q)\} = pq \;/\; [pq + (1-p)(1-q)] = 1 \;/\; (1 + \alpha)$$

ועבור הסיכוי שהמציאות היא 0 (ראובן פטור) נקבל:

$$P(0/A)=P(A/0)(1-q) \;/\; \{ p^2(1-p)q + p(1-p)^2 (1-q)\} = (1-p)(1-q) \;/\; [pq + (1-p)(1-q)] = \alpha \;/\; (1+\alpha)$$

כאשר הגדרנו:

$$\alpha = (1-p)(1-q)/pq$$

המכנים של שתי ההסתברויות המותנות הללו שווים, ולכן יחס ההסתברויות הוא כיחס ההסתברויות המותנות ההפוכות:

$$P(1/A) \;/\; P(0/A) = P(A/1)q \;/\; P(A/0)(1-q) = pq/[(1-p)(1-q)] = 1/\alpha$$

לצורך הפשטות נניח כעת שהסיכוי האפריורי שראובן חייב או לא הוא שווה (אמנם יש חזקת חפות, אבל אם הוא כבר בא לדין אז חזקת החפות שלו כבר לא רלוונטית. להיפך, סביר יותר שהוא אשם), כלומר $q=(1-q)=1/2$. בהנחה זו כל ההסתברויות האפריוריות מצטמצמות, ונותרנו עם נוסחה פשוטה יותר. מה שמתקבל הוא:

$$P(1/A)= P(A/1) \;/\; \{P(A/1) + P(A/0)\}$$

$$P(0/A)= P(A/0) \;/\; \{P(A/1) + P(A/0)\}$$

המכנים שווים, ולכן אם נחלק אותם זה בזה, נקבל (משימוש בהסתברויות שלמעלה):

$$P(1/A) \;/\; P(0/A) = P(A/1) \;/\; P(A/0) = p/(1-p)$$

מכיון שהסכום של שניהם חייב להיות 1, אז קיבלנו (כך כמובן גם היה יוצא מחישוב מפורש של המכנה והצבתו):

$$P(1/A) = p$$

$$P(0/A) = 1-p$$

דעת בעלבתים היפך דעת תורה

כעת ברור שאם הסיכוי שדיין יהיה צודק הוא גבוה מחצי (כלומר הוא ת"ח), אז יש היגיון ללכת אחרי הרוב. אם הסיכוי שדיין יהיה צודק נמוך מחצי (דיינים עמארצים) אז יש ללכת אחרי המיעוט.

וזהו שנאמר ב**סמ"ע** סי' ג סקי"ג:

> ***בתשובת מהרי"ו סימן קמ"ו כתב למהר"ש ז"ל, ואם תשמע לעצתי לא תשב אצל הקהל בשום דין, דידעת שפסקי הבעלי בתים ופסקי הלומדים הם שני הפכים, ואמרו בפרק זה בורר [סנהדרין כ"ג ע"א] כך היו נקיי הדעת שבירושלים עושים, לא היו יושבין בדין אא"כ היו יודעין מי ישב עמהם כו', ע"ש:***

ובלשון הרווחת בישיבות: דעת בעלבתים היפך דעת תורה. מש"ל.

למה שקיבלנו כאן יש הסבר אינטואיטיבי פשוט. הסיכוי ששניים יצדקו ואחד יטעה הוא $p^2(1-p)$. הסיכוי ששניים יטעו ואחד יצדק הוא נמוך יותר (בהנחה ש-p הוא מעל חצי): $p(1-p)^2$. זה היחס בין ההסתברויות. מה שצריך זה רק להפוך אותן להסתברויות כלומר לדאוג שהסכום שלהן יהיה 1. בשביל זה צריך לחלק כל אחת מהן בסכום של שתי ההסתברויות הללו. זה בדיוק מה שנתנה לנו נוסחת בייס.

הערה מעניינת שיוצאת מנוסחת בייס

מנוסחת בייס רואים שאם באמת הסיכוי האפריורי לכך שהנאשם יהיה חייב הוא קטן, התוצאה יכולה להשתנות, שכן אז המכנה של שני המקרים נשאר דומה אבל יש לכפול את המונה בסיכוי האפריורי ל-1 או ל-0. זה יכול לשנות את התמונה לגמרי.

זה מסביר את הצורך בשיקול של הפרקליטות האם להעמיד מישהו לדין או לא, לפני שהוא עומד לדין בבית המשפט. לכאורה אין לזה טעם שהרי זה בדיוק תפקידו של השופט. בדרך כלל מסבירים זאת בצורך לחסוך זמן מבית המשפט. אבל לאור מה שראינו כאן יש הסבר עמוק ויסודי יותר: תפקידו של השלב הזה הוא להגדיל את הסיכוי האפריורי לכך שהנאשם חייב (מבין אלו שהפרקליטות רואה כחייבים יש אחוז גבוה יותר של אשמים), וזה מאפשר לנו ללכת ביתר ביטחון אחרי פסיקת השופט או רוב השופטים.

ניסוח שונה לחישוב הזה

A הוא המאורע שהנאשם חייב.
B הוא המאורע שמתוך שלוש דיינים, שניים אומרים שראובן חייב ואחד אומר שהוא פטור.
נסמן את ההסתברות שדיין כלשהו יצדק ב־p ואת ההסתברות שלו לטעות ב־$1-p$ (נניח שהספק הוא בינרי). כמו כן נסמן את ההסתברות שהנאשם חייב ב־q.
ההתפלגות היא כך:

	guilty	not guilty
all judges think guilty	$q \cdot p^3$	$(1-q) \cdot (1-p)^3$
all judges think not guilty	$q \cdot (1-p)^3$	$(1-q) \cdot p^3$
exactly two judges think guilty	$q \cdot p^2 \cdot (1-p)$	$(1-q) \cdot p \cdot (1-p)^2$
exactly two judges think not guilty	$q \cdot p \cdot (1-p)^2$	$(1-q) \cdot p^2 \cdot (1-p)$

מכאן נובע כי:

$$P(A|B) = \frac{q \cdot p^2 \cdot (1-p)}{q \cdot p^2 \cdot (1-p) + (1-q) \cdot p \cdot (1-p)^2}$$

אם נניח כי $q = \frac{1}{2}$ מתקבלת התוצאה $P(A|B) = p$. כלומר אם כל דיין נוטה לצדוק ($p > \frac{1}{2}$) כדאי להרשיע את הנאשם בהינתן ששני דיינים חייבו ואחד זיכה.
אבן נשים לב שבמידה ויש הסתברות גבוהה או נמוכה שראובן אשם (כלומר $q \neq \frac{1}{2}$), לא בהכרח ראוי ללכת אחר רוב הדיינים.

1

2. קביעת וסתות: הסבר

שוב נגדיר את שני המצבים העובדתיים (שאנחנו מחפשים מי משניהם הוא האמתי): מצב שאין וסת קבוע (0) ומצב של ווסת קבוע (1). האירוע של שלושה מרווחים שווים (זו התוצאה שבפנינו) יסומן A.
הסיכוי שאם הווסת לא קבוע נקבל שלושה מרווחים שווים:

P(A/1) = 1

$$P(A/0) = 1/16$$

כעת נחשוב על מצב שבו קיבלנו וסתות בשלושה מרווחים שווים, כלומר קרה A. השאלה שלנו היא מה הסיכוי שיש לאישה ווסת קבוע לעומת הסיכוי שזה מקרי?

שוב נניח לצורך הדיון שהסיכוי לווסת קבוע הוא: $P(1)=q$, והסיכוי לווסת אקראי הוא: $P(0)=1-q$. לפי נוסחת ההסתברות השלימה (נוסחת בייס):

$$P(1/A) = q / \{q + 1/16(1-q)\}$$

$$P(0/A) = 1/16(1-q) / \{q + 1/16(1-q)\}$$

היחס בין ההסתברויות המותנות הוא:

$$\frac{16q}{1-q}$$

ושוב, אם q גבוה מאד (קרוב ל-1) יש יחס גבוה בין ההסתברויות, כלומר עדיף להניח ווסת קבוע. אבל אם q קטן, כלומר אחוז הנשים בעלות וסת קבוע הוא קטן, אין שום הצדקה להניח שהווסת קבועה על בסיס שלושה מרווחים שווים. ההיגיון של התוצאה הזאת פשוט מאד, כי אם קיבלנו שלושה מרווחים שווים עדיף להניח שזה מקרה (שסיכויו לא רע, כפי שראינו: 1/16) על פני ההנחה שנתקלנו באחת מאותן נשים מעטות שיש להן וסת קבוע.

הרי לנו תוצאה חשובה: קביעת הווסתות מניחה שלחלק לא זניח מהנשים יש וסת קבוע (אם ל-3% יש וסת קבוע הסיכויים בערך שווים, ואז השאלה האם יש לאישה וסת קבוע היא ספק שקול[1]). אם הנתון הזה משתנה דיני כל קביעת הווסתות צריכים להשתנות, ובמצבים אלו נראה שחזקת שלוש פעמים לא תספיק (ככל שאחוז הנשים בעלות וסת גבוה קטן, צריך להסתמך על סדרה ארוכה יותר של מרווחים שווים).[2]

הערה על חזקות שלוש פעמים

בהלכה יש עיקרון שאחרי שדבר כלשהו קורה שלוש פעמים ההנחה היא שזה לא מקרי. מכנים זאת חזקת שלוש פעמים (ג פעמים, ג"פ). הדוגמה של וסתות שבה עסקנו כאן היא אחד ההקשרים הללו. והנה, המפרשים דנים בחזקות אלו ובמשמעותן, ונראה שיש מהן חזקות שיוצרות מציאות ויש שמשקפות מציאות קיימת (ראה למשל **קה"י** טהרות סי' סו ועוד הרבה). לפחות לגבי חלק מהחזקות הללו ניתן לעשות ניתוח דומה (כמו שראינו לגבי וסתות), והמסקנות שאליהן הגענו כאן יכולות להשליך על השאלה היכן ליישם אותן וכיצד.

סיכום

בשני המקרים הללו ראינו שהתייחסות פשטנית להסתברויות מביאה לשגיאות. כדי להגיע להסתברויות שמסתכמות ל-1 ולהשוות ביניהן יש לעשות שימוש זהיר בנוסח בייס. בתוך הדברים עלו לנו השלכות הלכתיות מעניינות לשימוש בחזקות שלוש פעמים (שהוא תלוי בשכיחות התופעות המבוקשות במציאות)[3] וברוב בבי"ד (שתלוי ברמת הדיינים ובסיכוי שהנאשם/בעה"ד אכן אשם/חייב).

---

[1] יש לדון האם זה ספק דרבנן, שהרי וסתות דרבנן, או שזהו ספק דאורייתא שהרי יש לנו ספק שמא תראה באותו זמן ואז יש להחמיר מחשש לאיסור תורה לשמש עם אשתו נידה. ונראה מסברא שיש להחמיר בספק זה, שהרי הגם שווסתות דרבנן זו גופא היתה תקנת וסתות להחמיר על חשש כאילו היה כאן ספק דאורייתא. בניסוח אחר, אם יש לנו ספק שקול שמא הוסת קבועה, אזי במועד הצפוי יש 50% שהיא תראה דם ואז התשמיש יהיה אסור מן התורה, וזהו כמובן ספק דאורייתא. ויש עוד לפלפל בזה.

[2] השאלה איך לבדוק את אחוז הנשים בעלות וסת קבוע אינה פשוטה, שהרי הבדיקות הללו עצמן מניחות הנחות לגבי אחוזי הנשים. ואם נדרוש קביעות לאורך יותר משלושה מרווחים, אנחנו מתעלמים ממצב שבו יש וסת קבועה זמנית שמשתנה עם הזמן (לא כל וסת קבועה נמשכת כל החיים, ומה שלא נמשך אין פירושו שהווסת לא קבועה).

[3] ועל כך ראה גם ב[מאמרי **באסיא**] שהוא הבסיס לכל הדיון כאן.