

## לוגיקה מודאלית ונוסחת Barcan

לפני זמן מה נשאלתי [שאלה](#) לגבי הכרחיות מודאלית ונוסחת Barcan. הבעיה מוזכרת בקצרה כבר בערך [נוסחת Barcan בוויקיפדיה](#), והיא מתוארת ביתר פירוט בסרטון [הזו](#). שם לא עניתי מפני שלא היה לי זמן להיכנס לטיעון עצמו. כעת הקשבתי לסרטון באופן ביקורתי והרי תשובתי.

### הקדמה: מעלותיה וחסרונותיה של ההצרנה

עמדתי לא פעם על כפל הפנים של ההצרנה (=פורמליזציה) המתמטית והלוגית: מחד, היא מאפשרת לנו לדייק בהגדרות ובטיעונים ולהגיע לבהירות וודאות מקסימלית, ובה בעת ישנה סכנה שנלך שבי אחרי ההצרנה ונחשוב בטעות שהמסקנה היא ודאית והכרחית. עמדתי על כך גם בכמה וכמה טורים שעסקו בהטעיות הסתברותיות וסטטיסטיות, שם יכולות להיות טעויות בחישוב או טעויות באינטרפרטציה של התוצאות. בכל המקרים הללו, הן בלוגיקה והן בסטטיסטיקה, הטעות יכולה לנבוע מכך שגם אם מדובר בטיעון לוגי תקף (או הוכחה מתמטית), הנחותיו טעויות בדיקה, ו/או המשמעות (הסמנטיקה) שלו אינה מדויקת (הסמנטיקה והמשמעות אינן חלק מהסינטקס הלוגי עצמו). היישום של הטיעון הצורני לבעיה פילוסופית או אחרת תמיד כרוך בהנחות נוספות (ראו על כך גם בטורים [50](#) ו-[318](#)). בשו"ת [כאן](#) תוכלו לראות דוגמה לטעות בהבנת משמעותן של הלוגיקה והמתמטיקה עצמן.

כפי שכתבתי לשואל הנ"ל בתשובתי, לגבי כשלים וניתוח טיעונים של לוגיקה מודאלית, כבר נכתבו כאן באתר כמה טורים (ראו טורים [160](#), [301](#), [561](#), [580](#) ועוד). תוכלו להתרשם שם שלוגיקה מודאלית היא תחום שמועד אפילו יותר לטעויות, אבל לא תמיד ברור היכן. לעתים הבעיה היא בפשר העולמות האפשריים, שהוא הפשר המקובל עבור לוגיקה מודאלית, ולפעמים הבעיה טמונה בהנחות סמויות שבבסיס ההצרנה עצמה. כשאנחנו מצוידים בנקודת המבט החשדנית הזאת, נוכל לגשת לבחון את הבעיה שהעלה השואל ביחס לנוסחת Barcan. אך תחילה תזכורת עם תוספות ומיקודים נחוצים לגבי לוגיקה מודאלית ופשר העולמות האפשריים שלה.

### לוגיקה מודאלית: תזכורת

הרקע ללוגיקה מודאלית ולפשר העולמות המרובים ניתן בפירוט מה בטור [580](#), לכן כאן רק אחזור על העיקרים בקצרה. בלוגיקה מסורתית מדברים על אמת או שקר של טענה P. אבל האמת יכולה להיות מקרית (קונטינגנטית) או הכרחית. למשל, הטענה כעת אור בחוץ היא אמת, אבל לא הכרחית. יכול היה להיות גם חושך. לעומת זאת, הטענה שאור שאור או שחושך בחוץ היא אמתית בהכרח. לא יכול היה להיות שהיא אינה אמתית.

אם כן, מעבר לאמת או לשקר של טענה כלשהי, שבזה עוסקת הלוגיקה המסורתית, היא יכולה גם להיות הכרחית, אפשרית, או בלתי אפשרית. זה עוסקת הלוגיקה המודאלית. אם ניטול טענה P, אנחנו מסמנים את שני האופרטורים המודאליים הבסיסיים לגביה כך:

$$\Box P - \text{הכרחי ש-P} ; \Diamond P - \text{אפשרי ש-P}$$

אם תחשבו על כך תראו שקיימים קשרים בין האופרטורים הללו, כאשר משתמשים באופרטור השלילה (~). כך למשל כשאני אומר ש-P אינה הכרחית (=לא נכון ש-P הכרחית), פירושו שאפשרי שהיא לא תהיה אמתית (זו טענה שהאמת שלה קונטינגנטית). לעומת זאת, האמירה ש-P הכרחית משמעותה ש-P בלתי אפשרית. בסימול לוגי נבטא את הקשרים הללו כך:

$$\sim \Box P = \Diamond \sim P ; \sim \Diamond P = \Box \sim P$$

שימו לב שלומר שהיא בהכרח 'לא נכונה' ( $\Box \sim P$ ) לא שקול לאמירה שאין הכרח שהיא נכונה, או שהיא לא 'נכונה בהכרח' ( $\sim \Box P$ ). אין הכרח שטענה P נכונה זה אומר שהיא אמתית אבל יכלה גם להיות שקרית. אבל לומר שהיא בהכרח לא נכונה פירושו שהיא לא יכולה להיות אמתית. זוהי הדגמה לדיוק שמאפשרת לנו ההצרנה המודאלית.

הפשר של עולמות אפשריים נותן לתכונות המודאליות משמעותיות במונחי כלל העולמות האפשריים שניתן לדמיין. חשבו שיש לנו אוסף של כל העולמות האפשריים שניתן להעלות בדעתנו. יש עולם שבו אין חוק גרביטציה, עולם שבו יש חוק כזה אבל עם קבוע שונה, עולם עם מסה שלילית, עולם בלי

אלקטרומגנטיות, עולם עם אנשים בעלי כנפיים, עולם שבו אני לא קיים ועוד ועוד. כל מצב אפשרי לוגי (גם אם אינו אפשרי פיזיקלי, כלומר סותר את חוקי הטבע שלנו) הוא אחד מהעולמות הללו. יש כמובן אינספור עולמות כאלה שכל אחד שונה מחברו לפחות במשהו. לא תמצאו שם עולם שבו נכונה טענה והיפוכה בו זמנית. זה עולם שלא ניתן להעלותו בדעתנו, ובעצם הוא בלתי אפשרי (תיאורו ריק מתוכן). לכן אין עולם אפשרי שבו זה מתקיים. לעומת זאת, בכל עולם כזה תהיה נכונה הטענה 'P או לא P', שכן היא נכונה בהכרח (לא ייתכן עולם שבו היא שקרית).

במונחי אוסף העולמות האפשריים, ניתן לתת לתכונות הנ"ל של הטענות את הפשרים הבאים:

- טענה הכרחית היא טענה שנכונה בכל עולם אפשרי.
- טענה אפשרית היא טענה שיש עולמות אפשריים שבהם היא נכונה.
- טענה בלתי אפשרית היא טענה שאין שום עולם אפשרי שבו היא מתקיימת.

שימו לב שהפשר הזה מעביר אותנו מהשפה של הכרחי ואפשרי, שבהם איננו יודעים לטפל, לשפה של אמתי או שקרי שבהם עוסקת הלוגיקה המסורתית. עבור לוגיקנים זהו יתרון גדול, שכן הלוגיקה יודעת לטפל היטב בערכי אמת של טענות, אמיתית או שקרית, ובאמצעותם כעת נוכל לטפל גם בתכונות המודאליות שלהן (הכרחיות ואפשרות). המחיר שאותו אנחנו משלמים על הנוחיות הזאת הוא שהתכונות של אמת ושקר צריכות להיבדק בכלל העולמות האפשריים ולא רק בזה שלנו. זה בעצם מחייב שימוש בכמתים (יש, אין, כל) שהם חלק מתחשיב הפרדיקטים. אלו שני הכמתים הבסיסיים:

$$\forall x - \text{עבור כל } x \quad ; \quad \exists x - \text{ישנו } x$$

לא במקרה, בין שני הכמתים הללו מתקיימים קשרים דומים למה שראינו למעלה לגבי האופרטורים המודאליים. כשאני אומר שלא נכון שמהו מתקיים עבור כל x משמעות הדבר היא שיש x (לפחות אחד) שעבורו זה לא מתקיים.

כעת תוכלו לראות שהטענה: 'P היא הכרחית', מתורגמת לטענה: 'P אמיתית בכל עולם אפשרי', או: 'עבור כל עולם אפשרי מתקיים P'. ואם מצרינים זאת:  $\Box P = \forall w P(w)$  (כאשר w הוא עולם אפשרי כלשהו, ו-P(w) פירושו: הטענה P מתקיימת בעולם w). שימו לב שתרגמו טענה שמכילה אופרטור מודאלי (בצד שמאל של הזהות) לטענה שיש בה רק טענות וכמתים. מכאן תוכלו לראות בקלות את הקשרים המודאליים שתיארתי למעלה בין הכרח לאפשרות. לדוגמה, הטענה ש-P הכרחית פירושה שהיא אמיתית בכל העולמות האפשריים. לכן הטענה ש-P אינה הכרחית פירושה שיש עולם אפשרי (לפחות אחד) שבו היא לא מתקיימת. זהו אחד הקשרים שתוארו למעלה.

### משמעויות שונות של הכרח

למעלה כבר עמדתי על ההבדל בין האמירה שטענה P אמיתית לאמירה שהיא אמיתית בהכרח. הטענה 'P אמיתית' היא אמירה על העולם שלנו, אבל בהחלט ייתכנו עולמות או מציאויות שבהם זה לא יהיה אמיתי. לעומת זאת, 'P אמיתית בהכרח' פירושו שזוהי אמת בכל עולם שניתן להעלות על הדעת.

כעת שימו לב להבדל בין הטענה 'הכרחי שאם P אז Q', לבין הטענה 'אם P אז הכרחי ש-Q'. זה נשמע לנו מאד דומה, אבל אלו שתי טענות שונות. בטענה הראשונה ההכרח הוא הנביעה של Q מ-P. אבל לא P ולא Q הכרחיות בפני עצמן. לעומת זאת, בטענה השנייה אם P אמיתית (לא בהכרח) כי אז Q אמיתית בהכרח. שימו לב לא הנביעה היא הכרחית. הנביעה היא קונטינגנטית, הסיפא (המסקנה) היא שאמיתית בהכרח. בטענה הראשונה לא ייתכן עולם אפשרי שבו P יתקיים ו-Q לא. בטענה השנייה אם P מתקיים בעולם כלשהו אז Q מתקיים בכל העולמות (אבל אין כאן אמירה על P בעולמות אחרים).

כדי לראות את ההבדל ביתר חדות, נניח שידוע לנו כי P מתקיים רק בעולם שלנו. לפי הטענה הראשונה זה אומר רק ש-Q בהכרח מתקיים גם הוא בעולם שלנו, אבל קיומו שם אינו הכרחי (ולכן הוא אולי קיים גם בחלק מהאחרים, או שלא). לעומת זאת, לפי הטענה השנייה Q מתקיים בכל העולמות. בטור [301](#)

הבאתי את טיעונה של יהודית רונן לגבי הידיעה והבחירה. טענתה היא שגם אם מניחים שהקב"ה בהכרח יודע מה שאעשה, זה שקול לטענה מהסוג הראשון: הכרחי שאם הקב"ה יודע שאעשה A אז אני אעשה A (ההכרח הוא על הנביעה), אבל זה לא שקול לאמירה שאם הוא יודע אני בהכרח אעשה זאת. לכן ידיעת ה' אינה מנביעה דטרמיניזם (שעשיית A היא הכרחית). זוהי הדגמה להבחנה שתיארתי למעלה. לעצם העניין, הסברתי שם מדוע לדעתי ההבחנה הזאת לא באמת פותרת את הקושי, ואין כאן המקום לזה.

כדי לחדד יותר את עניינו של קיום בהכרח, אעמוד על עוד הבחנה. רבים מזהים את הטענה שאלוהים קיים לכל אורך ציר הזמן עם הטענה שקיומו הכרחי. הזיהוי הזה שגוי, לפחות חלקית. אם קיומו הכרחי הוא יהיה קיים בכל נקודת זמן, אבל זה שהוא קיים בכל נקודת זמן לא אומר שקיומו הכרחי. ייתכן שהוא קיים במקרה בכל נקודת זמן. אמנם לגבי קיום בכל עולם אפשרי ההבחנה הזאת קשה יותר. האמירה שקיומו הכרחי נראית זהה לאמירה שהוא קיים בכל עולם אפשרי (או בכל עולם שניתן להעלות על הדעת). כאן לא ייתכן קיום מקרי בכל העולמות הללו, שהרי אם אפשרי שהוא לא יהיה קיים אזי לפי ההגדרה יהיה לפחות עולם אחד מהם שבו אלוהים אינו קיים.

בשיחה הראשונה בספרי **המצוי הראשון**, ניתחתי את הטיעון האונטולוגי של אנסלם לקיומו של אלוהים. בסוף השיחה הסברתי את משמעותו של פרק ד בפרוסולוגיון, שבו אנסלם מוכיח את קיומו ההכרחי של אלוהים. לכאורה הדבר מיותר, שהרי בפרקים הקודמים הוא הוכיח את קיומו בהוכחה לוגית-מושגית (מה שקאנט מכנה 'טיעון אונטולוגי'), ולכן לכאורה אנחנו כבר יודעים בהכרח שהוא קיים. מהו, אם כן, הערך המוסף של הפרק האחרון אם אנחנו כבר יודעים מהפרקים הקודמים שאלוהים הוא יש הכרחי? הסברתי שם שיש הבדל בין לדעת בהכרח שהוא קיים (=הכרחיות אפיסטמית) לבין הטענה שקיומו הכרחי (=הכרח אונטי). הטענה "אני יודע בהכרח שאלוהים קיים" אינה זהה לטענה "אני יודע שאלוהים קיים בהכרח". ומכאן שגם אם אנסלם מגיע למסקנה בפרקים ב-ג שהטענה שאלוהים קיים היא אמיתית בהכרח (כי יש לי הוכחה לוגית עבודה), זוהי מסקנה אפיסטמית. אבל אין זה אומר שקיומו הכרחי במובן האונטי, וזה מה שעושה אנסלם בפרק ד. ניתן לנסח זאת כך: כשאני אומר שאני יודע בהכרח (או בוודאות) שמשהו קיים, זו טענה עליו ועל הוודאות שיש לי באותה ידיעה. כשאני אומר שהדבר קיים בהכרח זו טענה עליו ועל קיומו בלי קשר אליי ולידיעתי לגבי זה. גם אם לא הייתי יודע זאת, עדיין הוא היה קיים בהכרח. עובדות על העולם אינן תלויות בידיעה שלנו אודותיהן. אפשר אולי לומר שבמישור האונטי לא נכון לדבר על הכרח (של הטענה כשלעצמה) אלא צריך לדבר על ודאות (של האדם באמתותה של הטענה).

ניטול דוגמה נוספת. טיעון הקוגיטו מוכיח בהכרח שאני קיים (ראו עליו בטור [363](#)). האם זה אומר שקיומי הכרחי? חשבו, האם סביר בעיניכם שכל אחד מאיתנו הוא יישות הכרחית מבחינה אונטית כמו אלוהים? הרי אני קיים רק בעולם הזה ולא בעולמות אחרים, ובכל זאת הקוגיטו מוביל אותי למסקנה לוגית (ולכן הכרחית) שבעולם הזה אני קיים. לכן נכון אולי לומר שהקוגיטו יוצר אצלי ודאות בכך שאני קיים, אבל הוא בהחלט לא אומר שקיומי הכרחי (אונטית).

כעת נבחן איזה משני סוגי ההכרח מתואר על ידי פשר העולמות האפשריים. לכאורה ההכרח האפיסטמי (כלומר הוודאות), שכן כל העולמות שאני יכול להעלות בדעתי יקיימו את מה שוודאי בעיניי. לעומת זאת, ההכרח האונטי יכול אולי להיות פונקציה של העולם שבו אנחנו עוסקים. ייתכן שבעולם מסוים יש הכרח שיתקיים P, אבל זה לא אומר שהוא יתקיים בכל העולמות האפשריים. במילים אחרות, ניתן לתת פשר אחר של עולמות אפשריים שיתאים להכרח אונטי. P תהיה נכונה בכל עולם שמכיל את המרכיבים מהעולם שלי שגורמים להכרחיותה של P. הכימות נעשה כאן על תת קבוצה של כלל העולמות. לדוגמה, אם אני טוען שאלוהים קיים בהכרח בעולם מורכב כמו שלנו, כי אז ההכרח כאן יבוא לידי ביטוי רק בעולמות מורכבים מספיק. בעולם פשוט אולי אלוהים לא יהיה קיים, או לפחות שם קיומו אינו הכרחי. באופן אחר, רחב יותר, ניתן לדבר על כלל העולמות בשתי צורות שונות: אם אדבר על משהו שקיים בכל עולם שאני יכול לדמיין – זה מייצג הכרח אפיסטמי, ואם אדבר על משהו שקיים בכל עולם אפשרי – זה מייצג הכרח אונטי.

בטור [580](#) עמדתי על ההבדל בין שני סוגי ההכרח הללו, והראיתי כיצד הטיעון האונטולוגי-מודאלי של פלנטינגה כושל בכך שלא הבחין ביניהם. בין היתר הראיתי שם שהוא מדבר על הכרחיות בעולם בודד, ומערבב אותה עם הכרחיות במובן של קיום בכל העולמות האפשריים. אבל ההכרחיות הראשונה היא הכרחיות אונטית והשנייה היא הכרחיות אפיסטמית. הראשונה פירושה שהטענה נכונה בכל עולם אפשרי, והשנייה פירושה שהטענה נכונה בהכרח בעולם שלנו בלי להתייחס למה שקורה בשאר העולמות.

עד כאן ההקדמה על לוגיקה מודאלית ומשמעויותיה. כעת נעבור לנוסחת Barcan.

לא כל האלמנטים בלוגיקה מודאלית הם חד משמעיים. יש מהם שניתנים להגדרות שונות. זה חשוב מפני שהגדרות מסוימות מניחות הנחות מסוימות, ולכן מאחורי הצרנה מודאלית יכולים לעמוד פשרים שונים. אחת הדוגמאות לכך היא נוסחת Barcan, שמציעה את הקשרים הללו:

$$\forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x)$$

במילים שלנו: אם עבור כל  $x$  הכרחי שמתקיים  $P$  אזי הכרחי שעבור כל  $x$  מתקיים  $P$ . שימו לב ש- $x$  כאן הוא אובייקט כלשהו, כלומר הכימות (השימוש בכמתים) נעשה מעל אובייקטים ולא מעל עולמות ( $w$ ) כמו שנעשה למעלה.

לאור הקשרים שראינו למעלה, ניתן לראות שמשמעותו של הקשר הזה במונחי אפשרות ויישות היא:

$$\Diamond \exists x P(x) \rightarrow \exists x \Diamond P(x)$$

במילים שלנו: אם אפשרי שקיים  $x$  שעבורו מתקיים  $P$  אזי יש  $x$  שעבורו אפשרי ש- $P$ . שתי אלו הן נוסחאות שקולות לוגית זו לזו.

באותו ערך ב**וויקיפדיה** תוכלו למצוא את הנוסחאות הפוכות של Barcan, שהן שתי הגרירות הפוכות (שמתקבלות כשמחליפים את מיקום הרישא והסיפא בנוסחה). אם מאמצים גם אותן (זה דורש הנחה נוספת), אזי בנוסחאות שלמעלה אפשר להחליף את הגרירה בשקילות (שקילות היא גרירה דו כיוונית. לומר שטענה  $P$  שקולה לטענה  $Q$  פירושו ש- $P$  גוררת את  $Q$  וגם  $Q$  גוררת את  $P$ ).

חשוב להבין שנוסחת Barcan היא הנחה, ולא תוצאה של הלוגיקה המודאלית. ראשית, מפני שלא תוכלו להוכיח אותה על בסיס הקשרים שלמעלה, וגם לא על בסיס הפשר של עולמות מרובים. עולה מכאן שזוהי הנחה עצמאית שניתן לקבלה או לדחותה בלוגיקה המודאלית שלנו. שנית, גם ברמה ההגיונית היא לא עולה בהכרח ממשמעותם של האופרטורים והכמתים שפגשנו.

אנסה להמחיש זאת דרך מודל מסוים של הנוסחה. חשבו על  $x$  ככלל העצמים בעלי המסה. ונניח שהתכונה  $P$  היא תפיסת מקום במרחב. אם כן, הצד השמאלי של הנוסחה אומר שעבור כל עצם בעל מסה שנבחר מתקיים שהוא בהכרח תופס מקום במרחב, כלומר בכל עולם אפשרי הוא יתפוס מקום במרחב. מה יקרה בעולם שבו אין בכלל עצמים בעלי מסה? אין שום בעיה. מה יקרה בעולם שבו יש עצמים בעלי מסה אבל אין מרחב? לא ברור. האם ייתכנו שם עצמים בעלי מסה? (הרי הם בהכרח צריכים לתפוס מקום במרחב.) לחלופין, אולי הם תופסים מקום במרחב רק אם יש שם דבר כזה. אבל בעולם ללא מרחב לא נכון שהם צריכים לתפוס מקום. ניטול דוגמה ספציפית יותר. בעולם שלנו יש אבנים. לכן אחד ה- $x$ -ים שאני יכול לבחור היא אבן כלשהי. מה המשמעות של הטענה שהיא בהכרח תופסת מקום במרחב? ייתכנו עולמות אחרים שבהם האבן הזאת אינה קיימת, ואולי אין שם בכלל אבנים. שוב, אפשר לטעון שעלינו לבחון זאת רק בעולמות שבהם יש אבנים או האבן הזאת. אבל נראה שההכרח הזה לא יכול להיות מיוצג על ידי פשר העולמות האפשריים אלא אם נגביל אותו על ידי תנאים נוספים. באופן דומה, ניתן לטעון שבעולם שלנו בהכרח מתקיים עקרון הסיביות. האם זה אומר שעקרון הסיביות נכון בכל עולם אפשרי? לא ממש. ייתכן שקיומו של עקרון הסיביות תלוי במאפיינים כלשהם שייחודיים לעולם שלנו, ובעולמות שבהם הם לא קיימים עקרון הסיביות לא יהיה נכון (זה נכון לכל עולם שבו מתקיימים המאפיינים הללו, ולא בכל עולם אפשרי).<sup>1</sup>

כעת נעבור לצד ימין של הנוסחה. הוא מדבר על כלל העולמות האפשריים, וטוען שכל אבן שנבחר בכל עולם כזה תתפוס מקום במרחב. הבחירה של האבן נעשית בכל עולם ועולם, בעוד שבצד שמאל הבחירה נעשית רק בעולם שלנו (שבו, כאמור, יש אבנים), והטענה מדברת על כלל העולמות. ניתן להציע פשר להבדל בין הצדדים ולומר שצד שמאל של הנוסחה מדבר על הכרח אונטי (שקיים בעולם שלנו, ולא בהכרח בכל עולם אפשרי אחר), והטענה היא שכל אבן שנבחר בהכרח תופסת מקום במרחב. כאמור מדובר בהכרח אונטי, ולכן הוא אינו מתייחס לעולמות אחרים. לעומת זאת, צד ימין של הנוסחה מדבר על הכרח אפיסטמי, ולכן הוא מדבר על כלל העולמות. הטענה היא שבכל עולם אפשרי אבן תתפוס מקום במרחב. בין אם זהו הפשר ובין אם לאו, אתם כבר רואים שהזהות הזאת רחוקה מלהיות ברורה ונכונה תמיד. הבעיות הללו ודומותיהן מראות שנוסחת Barcan אינה תוצאה פשוטה של לוגיקה

<sup>1</sup> **בדיבויט** שלי עם אביב פרנקו עמדתי על כך שלפי יום עקרון הסיביות אינו תוצאה של תצפית ולכן הוא נכון אפריורי. שימו לב שלאור מה שראינו כאן זה לא בהכרח אומר שהוא נכון בכל עולם שניתן להעלותו על הדעת. אפשר כמובן לטעון שסביר שהוא מתקיים גם בעולמות אחרים, אבל חשוב להבין שזה אינו הכרחי.

מודאלית. אם רוצים לאמץ אותה, בפרט לפי פשר העולמות האפשריים, יש להוסיף ברקע כמה מגבלות או להניח הנחות פילוסופיות נוספות. כעת נוכל לעבור לבעיה שקיימת בנוסחאות Barcan אם מתחשבים בפשר העולמות האפשריים, אבל אנחנו כבר מבינים שהנוסחה מניחה הנחות נוספות, ואם נוצרת בעיה אזי הם כנראה לא מתקיימות (ולכן הנוסחה אינה נכונה).

### הבעיה: הגדרות ראשוניות

כדי לתאר את הבעיה, אעקוב אחרי הסרטון [הזה](#)<sup>2</sup>. הוא מציג שם שתי גישות פילוסופיות זו מול זו:

- הכרחנות (Necessitism) – זוהי גישה שאומרת שכל אובייקט שקיים כאן קיים בהכרח. אולי יכולות היו להיות לו תכונות אחרות, אבל הוא חייב להיות קיים. אפשר כמובן לתהות כבר כאן מה היה מגדיר אותו להיות אותו עצם אם תכונותיו היו שונות. נניח שמדובר במטבע, בעולם אחר היא חייבת להתקיים אבל יכלה להיות עץ. הדבר היחיד שניתן לומר על האובייקט הזה בכל עולם הוא שזהו אובייקט שיכול להיות מטבע (או עץ).
- אפשרנות (Contingentism) – זוהי הגישה ההפוכה שטוענת שלא הכל הכרחי, כלומר שיש לפחות אובייקט אחד שקיומו קונטינגנטי.

לאחר מכן הוא מסביר שכל אובייקט בכל עולם הוא או קונקרטי (ממומש) או אפשרי. למשל, המטבע בעולם שלי שתהיה עץ בעולם אחר, בעולם שלי היא מטבע קונקרטי אבל היא גם עץ אפשרי. הוא גם מתייחס להיותה זהה עם עצמה כתכונה שהיא מקיימת תמיד באופן קונקרטי, מה שלדעתי אינו נכון (כי זהות וקיום אינן תכונות, אלא אמירות שמתייחסות לדבר כשלעצמו. ראו להלן). כעת הוא מסביר שהכרחנות שנראית על פניה תמוהה ונוגדת אינטואיציה אינה כל כך כזאת. טענתו היא שגם ההכרחנים מסכימים שהמטבע יכולה הייתה שלא להיות, מה שהאינטואיציה שלנו אומרת, אבל הם מוסיפים שאם היא לא הייתה מטבע היא הייתה משהו אחר, מטבע אפשרי. לגבי זה אין לנו אינטואיציה, ולכן את זה אפשר לקבל. לא הבנתי את החילוק הזה, בתרתי: 1. אם היא הייתה משהו אחר זו לא הייתה היא. זה רק משחק מילים. 2. האינטואיציה שלי אומרת שהיא יכלה שלא להיות בכלל, ולכן הטענה שהיא הייתה קיימת בצורה אחרת גם היא נוגדת אינטואיציה. שתי הטענות כמובן קשורות זו לזו, אך אינן זהות. כמו שהוא עצמו מסביר, ההכרחנות מניחה את קיומם של אינסוף אובייקטים, שהרי כל אובייקט שיכול להיות קיים הוא קיים בפועל, אלא שאולי בצורה אחרת. אפילו בזה איני בטוח, שהרי המטבע שלי היא עץ אפשרי וגם כוכב אפשרי, וזה אותו אובייקט עצמו. ייתכן אובייקט אחד בעולם שיכול להיות אינספור אובייקטים שונים באינספור עולמות שונים. אמנם נכון שאם יש עולם שבו ייתכנו אינספור אובייקטים אזי חייבים להתקיים בעולם שלי אינספור אובייקטים. עד כאן זה פלפול מושגי לא מאד משכנע, עם תזות מוזרות גם אם אפשריות. אלא שכעת הוא עובר להוכיח את ההכרחנות מנוסחת Barcan. אם הוא יצליח בזה אזי יש לנו בעיה של ממש. תזה אונטולוגית מאד לא סבירה ניתנת להוכחה באמצעות הלוגיקה המודאלית.

### הבעיה: ההוכחה מהנוסחה

אם נתבונן בגרסה השנייה של הנוסחה שלמעלה, נראה שהיא אומרת שאם ייתכן אובייקט שמקיים את התכונה P, אזי קיים אובייקט שאפשרי שיש לו את התכונה P. כעת אנחנו מבינים שזה מעביר אותנו מהיתכנות של אובייקט מסוים לקיומו של אובייקט כלשהו (לא בהכרח אותו אובייקט). האפשרן ידחה את הנוסחה הזאת, שהרי היא אומרת שכל אובייקט שאפשרי אכן מתקיים. אבל האפשרן טוען שיש אובייקטים שהם אמנם אפשריים אבל לא מתקיימים בפועל. הנוסחה מראה לנו שהמספר של האובייקטים האפשריים והקיימים זהה.

אני לא מסכים לטענה הזאת. כפי שהערתי למעלה, לשני אובייקטים אפשריים שונים יכול להתאים אובייקט קיים אחד. לדוגמה, בצד שמאל נניח שאפשרי אובייקט שמקיים את התכונה P ומכאן יוצא שיש בפועל אובייקט שיכול לקיים את P. כעת ניקח עוד נוסחה שמדברת על התכונה Q, ואפשרותו של אובייקט שמקיים את Q מנביעה שקיים אובייקט שיכול לקיים את Q. אבל איני רואה מניעה לכך שזה יהיה אותו אובייקט. הוא יכול לקיים את P וגם את Q. זה כמובן נכון גם לאינספור היתכנויות כאלה,

<sup>2</sup> המקור לטיעון שלו נמצא במאמר [הזה](#) של ויליאמסון.

שכולן ימומשו באותו אובייקט עצמו. לכן מהנוסחה הזאת לא עולה שמספר האובייקטים האפשריים זהה למספר האובייקטים הקיימים.

ישנה עוד טעות בהצרנה שלו. הוא בעצם לוקח את התכונה  $P$  להיות "אובייקט שאינו קיים בפועל". כעת הוא טוען שהאפשרון מניח:  $\exists x \diamond P(x)$ , כלומר שישנו אובייקט שאפשרי שהוא אינו קיים בפועל. אבל פי נוסחת Barcan מקבלים:  $\exists x \diamond P(x)$ , כלומר שישנו  $x$  שאפשרי שאינו קיים בפועל. אבל אם הוא לא קיים בפועל אז באיזה מובן הוא 'ישנו'!?

זה נראה בעליל תעלול סמנטי ריק. אתה מציב בתכונה  $P$  את המשמעות: 'אינו קיים בפועל' ומגיע לסתירה. זה רק אומר שההצבה הזאת בעייתית. ואכן, מבט נוסף מגלה לנו מיד את הבעיה:  $P$  אינה תכונה. כפי שהערתי למעלה, קיום או אי קיום אינו תכונה אלא אמירה על הדבר כשהוא לעצמו (על העצם ולא על מאפייניו). הסברתי זאת בפירוט בדיון על הראיה האונטולוגית בשיחה הראשונה בספרי **המצוי הראשון** (ובקצרה בשו"ת [כאן](#)). קאנט כבר עמד על כך שאם זו הייתה תכונה אזי ניתן היה להוכיח את קיומה של יישות מושלמת (אלוהים) מתוך הגדרתה, וזה לא סביר (לדעתו זה בלתי אפשרי).

### מבט כללי

בסוף ההרצאה הוא עובר להצביע על נקודה בעייתית נוספת. נראה שמניפולציות לוגיות פורמליות מצליחות להוכיח טענה מטפיזית. זה עצמו בעייתי, שכן לוגיקה לא אמורה להכיל תוכן. זה קשר בין טענות שלא מניח מאומה על הטענות עצמן. הוא טוען שמכאן רואים את ההיפך: לוגיקה יכולה ללמד אותנו על העולם וההבחנה בין לוגיקה למטפיזיקה אינה קיימת. אבל זו כמובן טעות, שהרי ראינו שהוא בהחלט מניח הנחות, גם אם בלי מודעות.

ניתן לומר שיש כאן למעשה הוכחה אונטולוגית, והבעיה שהיא מציגה דומה מאד לבעיה הכללית בטיעונים אונטולוגיים. בניסוח של קאנט: אי אפשר להוכיח טענות סינתטיות על העולם על בסיס מניפולציות לוגיות בלבד (ללא הנחות). ואם הוא הצליח לעשות זאת כאן, הוא פשוט הגניב לשדה הנחות סמויות בלי לשים לב. הוא נופל כאן באותה טעות שנפל אנסלם ושנפלו בה רבים אחרים שניסו להציג טיעונים אונטולוגיים (כמו דקרט בקוגיטו ואנסלם בטיעון האונטולוגי שלו). אבל כפי שהסברתי בספרי הנ"ל, ביקורתו של קאנט מניחה את המבוקש. הוא מניח שאי אפשר להוכיח טענות על העולם (סינתטיות) על בסיס לוגיקה והגדרות בלבד. זו ריקותו של האנליטי. אלא שכל עוד לא הצבעת על הפגם בטיעון זוהי הצהרה ריקה. לכאורה כל טיעון כזה מוכיח שההנחה הזאת עצמה שגויה, שהרי הוא מצליח להוכיח טענה סינתטית על בסיס הגדרות ולוגיקה בלבד. רק אם נצביע על הכשל בטיעון או נחשוף הנחות סמויות שהוא מניח, נוכל לחזור ולהסיק שאכן אין דרך להוכיח טענות סינתטיות על בסיס הגדרות ולוגיקה בלבד.

זה מה שעשיתי בשיחה הראשונה לטיעון של אנסלם, ובטור [363](#) לגבי טיעון הקוגיטו. כאן עשיתי זאת לגבי טיעונו של ויליאמסון. מצאתי בטיעון שלו לפחות שלושה פגמים: 1. הטיעון שלו מניח את נוסחת Barcan, וכפי שהראיתי היא עצמה אינה לוגיקה צרופה. היא מניחה במובלע הנחות מטפיזיות. 2. מעבר לזה, הוא מערבב בין הכרח אונטי לאפיסטמי. 3. ולבסוף, הוא מניח שוב ושוב שקיום או אי קיום של אובייקט הם תכונות שלו, ולא היא.