בס"ד

על חשיבה מחוץ לקופסה

לפני כמה שבועות ראיתי באחד הצהובונים שמחולקים בבתי הכנסת את החידה הבאה במודעה של מכון לב:

למטה הם כתבו שהפתרון מעיד על הפותר שהוא חושב מחוץ לקופסה. זה עורר בי מחשבות נוגות לגבי הגדרת חשיבה מחוץ לקופסה. האם באמת פתרון של חידה כזאת הוא חשיבה מחוץ לקופסה?

ניתוח

ראשית, הבה ננסה לפתור את החידה. ההנחה שלי היא שכל צורה מייצגת מספר כלשהו. יש כאן שלוש צורות, כדור, פירמידה וקובייה, שכל אחת מהן מייצגת מספר. הנחה נוספת היא שכל פוזיציה או יחס מרחבי בין צורות מייצגים פעולה מתמטית בין המספרים שמיוצגים על ידן. יש לנו כאן שתי פוזיציות, צורה מעל צורה וצורה (או מבנה של צורות) ליד צורה (מבנה). כל אחד מהיחסים הללו מייצג פעולה מתמטית (שיכולה להיות אותה או אחרת).

במושכל ראשון אני מניח שהמספרים צריכים להיות שלמים, והפעולות צריכות להיות מתוך הפעולות המתמטיות היסודיות/פשוטות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק ואולי חזקה). למה? כי כך נראה לי סביר וטבעי.

בהנחות הללו כשניגשים לפתור את החידה הפתרון די מתבקש. נתחיל במשוואה העליונה. יש שם שני מבנים זהים שכל אחד מהם מורכב משתי צורות. לכן סביר להתחיל בפענוח היחס של עמידה ליד. האם יש לכפול את שני המבנים זה בזה או לחבר או לחסר אותם. אלימינציה פשוטה מראה לנו שזו אינה יכולה להיות מכפלה, שכן ל-24 אין שורש שלם. חיסור זה גם לא יכול להיות, כי אז התוצאה צריכה להיות 0 ולא יכולה להיות 24. זה גם לא יכול להיות חזקה, כי אין מספר שלם שפותר את המשוואה $24=X^X$. מה שנותר לנו, אם כן, הוא חיבור.

המסקנה הזאת נותנת לנו מיד שתי תוצאות ראשוניות: העמידה של מבנים זה ליד זה היא חיבור. וערכו של כל אחד משני המבנים במשוואה העליונה הוא 12. כעת עלינו לשאול את עצמנו מה משמעות המבנה של צורה מעל צורה? כאמור זו יכולה להיות כל אחת מחמש הפעולות שמניתי למעלה (כולל פעולת החיבור עצמה). הצעה ראשונה היא שזוהי פעולה שונה, שכן מצבים מרחביים שונים מייצגים פעולות מתמטיות שונות. זה יכול אולי להיות חזקה, אבל זה רק אם נניח שהקובייה היא 12 והפירמידה היא 1. לפי הזה מהמשווה התחתונה יוצא שהכדור הוא 5-, ואז מקבלים $(-5)^1 + 12 = 7$. לפי זה, מקבלים במשוואה השלישית $(-5)^{12} = 1,955,078,125$.

טוב, אבל ניתן לשלול את התוצאה הזאת, שכן בתחתית החידה הופיעה עוד שורה:

אנחנו רואים למטה שהתוצאה צריכה לתת לנו תאריך בחודש, כלומר מספר שלם בין 1 ל-31. זה גם שולל את כל אינסוף האפשרויות של פתרונות עם מספרים לא שלמים. עלינו לחזור, אם כן, להנחות שלנו. כדאי לשים לב שההנחיות לפתרון החידה מדברות על שלוש משוואות (תרגילים?), שיש לפתור את השלישית באמצעות שתי הראשונות. לכאורה החידה עומדת לעצמה, ואין הפנייה לרמז שבתחתית התמונה. הוא רק תוצאה של הפתרון ולא רמז. אולם אם אכן התוצאה צריכה להיות שלימה, זו שולל את הפתרון שהצעתי למעלה. כלומר עליי להשתמש בזה גם כרמז. דומני שיש כאן ניסוח לא מדויק של החידה.

טוב, אז אם כך מתבקש וטבעי לנסות לפענח את היחס של צורה מעל צורה כמכפלה. במקרה כזה, אם המספרים שלמים סביר לבדוק במשוואה העליונה שהקובייה היא 4 והפירמידה היא 3, או ההיפך. אם נשוב למשווה השנייה נקבל שבשני המקרים העיגול הוא 1. אבל התוצאה של המשוואה השלישית תשתנה: היא תהיה 4 או 3 בהתאמה. בשני המקרים זהו מספר שלם שנותן את התאריך בחודש. שני הימים הללו השנה יוצאים ביום רביעי וחמישי, כלומר אי אפשר לשלול אף אחד מהם (בשבת אני מניח שמכון לב לא יעשה יום פתוח). נותרנו עם שתי אפשרויות שונות ששתיהן מתאימות. אין דרך להכריע בין שתי אלו כמובן, ואני מניח שזו טעות של מכון לב שלא חשבו מספיק מחוץ לקופסה (או שמא אני פספסתי כאן משהו?...).

אגב, זה אינו הפתרון היחיד. לולא הרמז שבתחתית התמונה, ניתן היה להציע עוד פתרונות אפשריים. למשל, ניתן להניח שאכן מדובר במכפלה ולהציב בכל מבנה למעלה את המספרים 2 ו-6. אם הקובייה היא 2 והפירמידה היא 6 אז מקבלים למטה שהעיגול הוא לא שלם (1.2). התוצאה בסוף יוצאת 2.4, שוב לא מספר שלם. ואם נניח ההיפך, שהקובייה היא 6 והפירמידה היא 2, אזי העיגול הוא 0.5. זה אמנם לא שלם, אבל עדיין התוצאה בסוף יוצאת: 6/0.5 = 12, מספר שיכול להתאים (השנה זה יוצא ביום שישי, לגיטימי ליום פתוח במכון לב).

ניתן היה גם לפענח את המצב של צורה מעל צורה כחיסור (ולא ככפל). זה מציב בפנינו כמובן המון אפשרויות. כל אחד מהמבנים שלמעלה צריך לתת 12. חיסור שנותן לנו 12 יכול להיות למשל 6 – 18, כלומר שהקובייה היא 6 והפירמידה 18. אם נשתמש בזה במשוואה השנייה, העיגול נותן לי 17, ואז התוצאה של המשוואה האחרונה היא 11-. אבל מהרמז עולה שזה לא מתאים.

אפשרות שלישית היא לפענח גם את המצב של צורה מעל צורה כחיבור, כמו המצב של צורה ליד צורה (בדיוק כמו שבצמד משוואות עם שני נעלמים, X ו-Y, אין מניעה שנקבל כפתרון X = Y). במצב כזה יש 12 אפשרויות לסדר את הקובייה והפירמידה. אם ניקח למשל את הקובייה כ-8 והפירמידה כ-4, מקבל מהמשוואה השנייה שהעיגול הוא 4-. ומהמשוואה השלישית נקבל את התוצאה 4, לגיטימית לגמרי. לא בדקתי הלאה, אבל אני מניח שישנם עוד פתרונות בכיוון זה.

מה אם נפענח את המבנה של שתי צורות שזו מעל זו כחילוק? למשל, הפירמידה היא 36 והקובייה היא 3. במצב כזה העיגול הוא 9, אבל אז התוצאה הסופית אינה שלימה (1/3). נדמה לי שכל שאר התוצאות גם יוצאות כאן שבורות, ולכן זו אינה אופציה.

טוב, די לנו במה שראינו עד כאן כדי לעבור ולשאול את עצמנו משהו על חשיבה מחוץ לקופסה.

מהו הפתרון שמחוץ לקופסה?

עוד לפני ששמתי לב לרמז שבתחתית התמונה, במבט ראשון היה לי ברור שהפתרון הוא 3 או 4. ההנחה שלי הייתה שמדובר במספרים שלמים, ושהעמידה זה לצד זה היא חיבור, והעמידה זה מעל זה היא פעולה אחרת. מיד הנחתי שמדובר בכפל. כאמור, זה נתן לי שתי תוצאות שונות, אבל למרות זאת היה לי ברור שזוהי התשובה המבוקשת והנחתי שהכפילות היא טעות שלהם. נניח שקיבלתי תוצאה הגיונית וטבעית, מדוע להניח שזוהי באמת התוצאה הנכונה? מדוע לא לקחת בחשבון את האפשרות שמדובר בפעולות זהות (חיבור וחיבור), או בחיבור וחזקה? גם אחרי שמתחשבים ברמז, עדיין ראינו שיש כמה אפשרויות אחרות. למשל, בהנחה שהערכים של הצורות יכולים להיות שבורים כל עוד הם מביאים אותנו לתוצאה שהיא מספר שלם בין 1 ל-31. לחילופין, שהיחס של צורה מעל צורה גם הוא חיבור ולאפשר ערכים שליליים לצורות, באופן שנותן תוצאה הגיונית לתאריך. שני הפתרונות הללו אמנם נראים לנו פחות טבעיים ומתבקשים, אבל מדוע לחשוב בגלל זה שהם לא נכונים?

הייתי אפילו אומר יותר מכך. הפתרון הראשון שהצגתי הוא תוצאה של חשיבה מתבקשת, טבעית וצפויה, כלומר של חשיבה בתוך הקופסה. דווקא שתי התוצאות האחרות נותנות לנו פתרונות שמחוץ לקופסה. בפרט ששתי האחרונות נותנות לנו פתרון יחיד, בעוד שהפתרון הטבעי נותן לנו שני פתרונות שונים אפשריים. אז למה אני בכל זאת בטוח שהם התכוונו לאחד מהפתרונות הטבעיים? פשוט, מפני שברור לי שהם ציפו דווקא לפתרון בתוך הקופסה ולא מחוצה לה. פתרונות עם מספרים שבורים או שליליים הם מחוץ לקופסה, ולכן הם לא אלו שציפו להם.

המסקנה היא שאנשי מכון לב מנסים כאן לבחון דווקא מי חושב בתוך הקופסה ולא מי חושב מחוצה לה, ואולי אפשר גם לומר שהם עצמם חושבים בתוך הקופסה ולא מחוצה לה. הם בהחלט רוצים מכם חשיבה שיטתית, מסודרת וטובה, כלומר רוצים שהסטודנט שמתקבל יהיה אדם עם יכולות, אבל זה רק כל עוד הוא חושב בתוך הקופסה, ולא מחוצה לה. אדם שחושב מחוץ לקופסה יגיע בתאריך 12.7 ולא יתקבל. האחר שמגיע ל-4 בפתרון השני יכול אולי להגיע ביום הנכון ולא להתקבל (כי במבחנים הם יסננו אותו על חשיבה מחוץ לקופסה) או להגיע ביום הלא נכון ולא להתקבל. אדם שחושב בתוך הקופסה, יגיע למסקנה שהתוצאה היא 3 או 4, ואז עליו להגיע בשני הימים וכך להתקבל. הטעות שלהם תגרום לו לכל היותר לעבוד קשה, אבל בסוף אל חשש, אם הוא חושב מספיק בתוך הקופסה הוא יתקבל.

כדי להבהיר טוב יותר את משמעותה של חשיבה בתוך ומחוץ לקופסה אעבור כעת לטיעון ידוע של ויטגנשטיין.

ויטגנשטיין על עקיבה אחרי כללים

הבאתי כאן בעבר (ראו למשל בטור 482. ראו עליו גם כאן בפרק ב) את הטיעון הידוע של ויטגנשטיין, שמכונה 'עקיבה אחרי כלל' (following a rule). נניח שמציגים בפניכם במבחן פסיכומטרי את הסדרה הבאה: ...2,4,6,8, ושואלים אתכם מהו האיבר הבא בסדרה? התשובה המתבקשת היא 10 כמובן, שכן אנחנו מניחים שהכלל הוא סדרת המספרים הזוגיים (ונוסחת הנסיגה ששולטת עליו היא הוספת 2 מכל איבר לבא אחריו). אבל ויטגנשטיין טוען שהתשובה יכולה גם בה במידה להיות 16, שכן הכלל יכול להיות הבא: מכפלה ב-2, הוספה של 2, הוספה של 2 ואז מכפלה ב-2 וכן הלאה. אתם מבינים שהתשובה יכולה להיות גם כל מספר אחר שתרצו. חשבו כעת על הסדרה ...3,5,7. מהו המספר הבא? מתבקש לכתוב שם 9, כשההנחה היא שמדובר בסדרת האי זוגיים. אבל בה במידה זה יכול להיות גם 11, אם הסדרה היא הראשוניים (אלו שמתחלקים רק בעצמם וב-1).

הוא ממשיך וטוען טענה כללית יותר. כל סדרת מספרים נתונה ניתן להמשיך בכל צורה שתרצו. לכל המשך כזה יש הצדקה על ידי כלל מתאים. לדוגמה, נניח שנתונה לנו הסדרה השנייה: ...3,5,7, וכשאנחנו בודקים את אחד המבחנים אנחנו מגלים תלמיד שכתב שם 4.7-. האם הוא בהכרח טעה? ממש לא. הנה לכם כלל שיצדיק את ההמשך הזה.

נניח שהכלל הוא מהצורה של פולינום עם ארבעה מקדמים:

$$f(n) = a_1 + a_2n + a_3n^2 + a_4n^3$$

אם אנחנו רוצים שהסדרה f(n) תיתן לנו את הסדרה המבוקשת, עלינו לקבוע את המקדמים בהתאם. לשם כך נבנה ארבע משוואות עם ארבעה נעלמים:

$$f(n=1) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$$

$$f(n=2) = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 = 5$$

$$f(n=3) = a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 27a_4 = 7$$

$$f(n=4) = a_1 + 4a_2 + 16a_3 + 64a_4 = -4.7$$

אפשר בקלות לפתור את ארבעת המשוואות הללו עבור ארבעת המקדמים. התוצאה שמתקבלת היא:

$$a_1 = 14.7 \;\; ; \;\; a_2 = -23.11666 \;\; ; \;\; a_3 = 13.7 \;\; ; \;\; a_4 = -2.28333$$

אם נציב את התוצאה בביטוי עבור $f(n)$, נקבל את הסדרה המבוקשת:

$$f(n) = 14.7 - 23.11666n + 13.7n^2 - 2.28333n^3$$

אם תציבו כעת בתוך f את n=1,2,3,4 תקבלו בדיוק את התוצאות המבוקשות, כלומר הוכחנו שהתשובה של אותו תלמיד שרשם כהמשך את 4.7- היא נכונה כמו כל תשובה אחרת. זוהי כמובן רק דוגמה, ואפשר לעשות זאת לכל סדרה עם כל תוצאה שתרצו באינספור צורות שונות (אפשר לבחור סדרה של פלינום ממעלה גבוהה יותר או כל צורה פונקציונלית אחרת כשאנחנו מתאמים את הפרמטרים לסדרה המבוקשת).

בחזרה לחשיבה מחוץ לקופסה

אז למה בכל זאת התלמיד שרשם 4.7- לא יתקבל ללימודים באוניברסיטה? מפני שהוא חושב מחוץ לקופסה. המבחן הפסיכומטרי מצפה לתשובה של חשיבה בתוך הקופסה, והוא ממיין את הסטודנטים כך שמתקבלים אלו שחושבים בתוך הקופסה ומנופים אלו שחושבים מחוצה לה.

אתם ודאי חושבים שאני כותב זאת בביקורתיות על תהליך הסינון האקדמי, אבל ממש לא. כך הוא באמת צריך להתנהל. כדי להבין זאת, חשבו על מצב שבו התהליך מאפשר לכל החברים שחושבים בצורות כאלו להתקבל ללימודים. אותו ברנש שכתב 4.7-, ביחד עם אחד שכתב שם 1, עוד אחד שכתב 1549, שלישי שכתב 17.3-, רביעי כתב פאיי והחמישי e^2 וכן הלאה. תשאלו, אם כל תשובה מתקבלת, מה בכלל הבחינה הזאת בודקת? כיצד, אם בכלל, מתבצע כאן סינון? במבחן הזה מתקבל ללימודים רק סטודנט שמציג הצדקה לתשובתו (פונקציה $f(n)$ מתאימה לתשובה). סתם תשובות ללא הצדקה אינן מתקבלות (זה לא מבחן אמריקאי, אלא פסיכומטרי שדורש תשובות מלאות).

כעת נכנס המרצה לכיתה ורוצה ללמד אותם נושא מתמטי כלשהו. אין לו שום סיכוי לעשות זאת. פשוט אי אפשר ללמד כיתה כזאת. ויטגנשטיין שם מסביר שכל כלל שאנחנו רוצים ללמד את התלמידים שלנו מתבסס על מתן דוגמאות והכללה. לדוגמה, אנחנו רוצים ללמד אותם לספור את המספרים הטבעיים בשיטה העשרונית. מלמדים אותם לספור מ-1 עד 10, ואחר כך עד 100 ועד 1000. ואז המורה מורה לאחד התלמידים להמשיך את הספירה, והוא עונה ללא היסוס: e-. המורה הנדהם שואל אותו כיצד הגיע לתשובה הזאת? התלמיד מיד מנפק לו פונקציה $f(n)$, שנותנת לנו את אלף המספרים הטבעיים הראשונים ואחריהם את e–. טוב, המורה לא מתייאש וממשיך ללמד עד 10,000, אלא שאז התלמיד הבא שמתבקש להמשיך זאת, עונה: 15, וכמובן מנפק פונקציה מתאימה שתצדיק זאת. למעשה, התלמידים הללו בכלל לא מנפקים את הפונקציות המצדיקות. המוח שלהם בנוי כך שאחרי 1,000 יוצא להם טבעי e–, ולשני יוצא אחרי 10,000 המספר 15. כך יקרה למורה הזה בכל נושא מתמטי שהוא ינסה ללמד אותם, מתקדם או בסיסי.

המסקנה היא שכשהמוח של התלמידים בנוי בצורה משונה (מחוץ לקופסה) אין שום דרך ללמד אותם. מורה יכול ללמוד אך ורק תלמידים שמוחם בנוי כמו זה שלו. כלומר כאלה שיש להם קופסה זהה לזו שלו. אין פלא שכשמוסד שבנוי בצורה מסוימת ממיין תלמידים, הוא רוצה לקבל רק תלמידים שמוחם בנוי כמו הסטנדרט של המוסד. תלמידים עם מבנה מוח אחר פשוט לא יוכלו ללמוד שם. אין פלא שאיינשטיין וגאונים אחרים היו ידועים כתלמידים גרועים. המוח שלהם בנוי בצורה אחרת מהסטנדרט של מוריהם ושל כל שאר האנשים, ולכן קשה מאד ללמד אותם.

המסקנה היא שצדק מכון לב במדיניותו לקבל דווקא תלמידים שחושבים בתוך הקופסה. השאלה שמטרידה אותי היא רק מדוע הוא משקר וכותב שהוא מחפש דווקא כאלו שחושבים מחוץ לקופסה. טוב, כנראה צריך חשיבה מחוץ לקופסה כדי להבין זאת.

כאן תוכלו למצוא סיפור חביב על חשיבה מחוץ לקופסה.