בס"ד

# הכיפה של נורטון

לפני כמה ימים שלחו אליי לשו"ת באתר פרדוקס שלא הכרתי, ששמו בישראל "הכיפה של נורטון" (Norton's dome). הוא תוקף את התפיסה הדטרמיניסטית של הפיזיקה, ובעצם של המכניקה הניוטונית. זהו ממש מקרה מרתק שעורר בי הרבה מחשבות, ולבקשת כמה גולשים אנסה לחלוק אותן עמכם כאן. אומר מראש שהטור הזה הוא קצת טכני, ואני משתמש בו בסימול מתמטי. אני אנסה להסביר אותו כאן ככל שאוכל, אבל איני בטוח שזה יהיה ברור למי שכלל אינו מכיר אותו.

**מבט קצר על דטרמיניזם ופיזיקה**

לא פעם עסקתי כאן בשאלת הדטרמיניזם. זוהי תפיסה שלפיה המצב עד ההווה קובע באופן חד ערכי את העתיד, כלומר שלא ייתכן שמאותה היסטוריה ייצאו שני עתידים שונים. שאלה זו נוגעת ליחסנו לאדם, וליחס בינו לבין שאר הטבע, הדומם הצומח והחי. מקובל לחשוב שהטבע הוא ודאי דטרמיניסטי, והשאלה היא רק לגבי האדם, האם הוא חריג ויש לו רצון חופשי או לא. מתחילת המאה העשרים החלה להתפתח תורת הקוונטים, שהדגימה תחומים לא דטרמיניסטיים בפיזיקה עצמה. לאחר מכן בא הכאוס, שגם הוא מוצג לא פעם כחריגה מהדטרמיניזם הפיזיקלי. כתבתי לא פעם שלגבי הכאוס זוהי טעות. אין שם שום דבר לא דטרמיניסטי. מה שיש שם הוא קושי חישוב שלנו שנחוץ לניבוי העתיד, אבל העתיד כשלעצמו מוגדר על ידי ההיסטוריה באופן חד ערכי. אמנם בתורת הקוונטים, לפחות בפרשנויות המקובלות, נראה שאכן יש חריגה מהדטרמיניזם. אבל על הפיזיקה הקלסית, לפחות אחרי ששללנו את עניין הכאוס, יש הסכמה מקיר לקיר שמדובר בתורה דטרמיניסטית לגמרי.

**תכונותיה של המכניקה הניוטונית: דטרמיניזם ורוורסיביליות**

חוקי הפיזיקה, ובפרט המכניקה של ניוטון, מתוארים על ידי משוואות דיפרנציאליות שקובעות את המצב ברגע הבא על בסיס המצב ששורר בהווה. משמעות הדבר היא שאכן ניתן לקבוע קטגורית את העתיד על בסיס ידע מלא של ההווה. כמובן שאם חסר לנו מידע על ההווה לא נוכל לדעת את העתיד (זהו בדיוק המצב בכאוס), אבל זו רק בעיה טכנית. אם היה לנו מידע מלא (ויכולת חישוב מספיקה) היינו יודעים את כל מה שעתיד להתרחש.

אקדים הסבר קצר על מושג הנגזרת למי שאינו מכיר. אם יש לי פונקציה שתלויה במשתנה אחר, כמו למשל מיקום של גוף, X, שתלוי בזמן, t, אני עשוי להתעניין בקצב השינוי שלה עם הזמן. האם היא משתנה מהר או לאט, ועד כמה. ניוטון ולייבניץ ניסחו את מושג הנגזרת שהוא מושג מתמטי שמייצג את עוצמת השינוי של X עם הזמן וכיוונו (שינוי כלפי מעלה או מטה, כלומר האם המיקום גדל או קטן). הנגזרת של המיקום לפי הזמן מוגדרת להיות:

(1) $\dot{X} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Δx הוא השינוי במקום ו-Δt הוא השינוי בזמן. כך, שאם הגוף עשה שינוי מיקום של 10 מטר במהלך קטע זמן של 2 שניות, קצב השינוי של המיקום הוא 5 מטר לשנייה. זו מוגדרת להיות מהירותו של הגוף. המהירות היא קצב השינוי של המקום עם הזמן. כמובן שאנחנו מכירים תנועה במהירות קבועה (קצב השינוי הוא אותו), אבל ייתכן מצב שהגוף משנה כל הזמן את מהירותו. במצב כזה עלינו להתייחס לקטעים קטנים מאד של זמן ($\Delta t \to 0$) ולשאול מה קצב השינוי בכל קטע קטן של זמן. התוצאה עשויה להיות שונה בכל נקודת זמן על פני המסלול.

אם נעשה את אותו תעלול למהירות עצמה, כלומר ל-$\dot{X}$, נקבל את קצב שינוי המהירות עם הזמן, שהוא התאוצה של הגוף. זוהי הנגזרת השנייה של המיקום, ובוודאי לא תתפלאו לשמוע שמסמנים אותה ב-$\ddot{X}$.

כעת נוכל להבין את החוק השני במכניקה של ניוטון, שקובע את מיקומו של גוף דרך המשוואה הבאה:

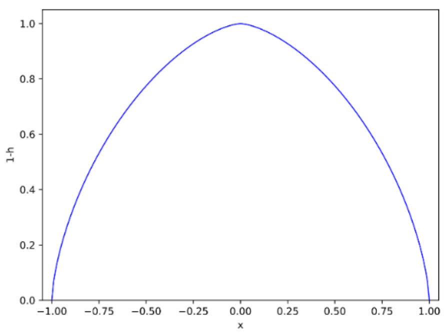
(2) $m\ddot{X} = F(X,t)$

X הוא מיקומו של הגוף, m היא מסתו, ו-F הוא הכוח שפועל עליו שבעצמו יכול להיות תלוי במקום ובזמן. שתי הנקודות מעל המיקום X מסמנות, כאמור, נגזרת שנייה לפי הזמן.

זוהי משוואה דיפרנציאלית, כלומר משוואה שהנעלם שלה הוא פונקציה (במקרה שלנו – X(t) ), והיא מכילה גם נגזרות שלה. לפתור את המשוואה הזאת פירושו למצוא את מסלולו של הגוף, כלומר את מיקומו בכל נקודת זמן, כלומר את הפונקציה X(t).
לא קשה להבין שהמשוואה הזאת מתארת רק את השינוי במיקום (כלומר את המיקום אחרי שעבר זמן Δt במונחי המיקום בזמן t). לכן אם נרצה לרשום את המיקום X עצמו בכל נקודת זמן t, הדבר תלוי בשאלה מאיפה יצאנו (המיקום ההתחלתי) ומה הייתה המהירות בתחילת הדרך. משם והלאה הדינמיקה של ההמשך מתוארת על ידי המשוואה הנ"ל של החוק השני של ניוטון. מכאן עולה שכדי לקבוע חד ערכית את המסלול שמתאר את מיקומו של גוף לאורך כל ציר הזמן עלינו לדעת את מיקומו ומהירותו ההתחלתיים, ואז המשוואה הדיפרנציאלית של החוק השני תיקח אותנו הלאה. אם אין לנו את המיקום והמהירות ההתחלתיים (או מיקום ומהירות בכל נקודת זמן אחרת) אזי אין לנו מידע מלא. במצב כזה לא נוכל לדעת את מיקומו של הגוף בצורה חד ערכית, אבל זה רק בגלל חוסר מידע. בהינתן תנאי ההתחלה, המשוואה הזאת קובעת באופן חד ערכי כל מה שיקרה בהמשך.
תכונה נוספת של המכניקה הניוטונית היא הסימטריה בציר הזמן, כלומר ההפיכות. כל תהליך לגיטימי במכניקה שנצפה בו, אם נסריט את הסרט הפוך יתקבל תהליך לגיטימי נוסף. כלומר המכניקה אדישה לציר הזמן. מבחינתה הוא יכול גם לזרום הפוך וזה לא ישנה מאומה. ואכן חידת כיווניותו של ציר הזמן (למה הוא זורם דווקא מהעבר לעתיד ולא להיפך) מעסיקה לא מעט פילוסופים ופיזיקאים. הסיבה להפיכות של תהליכי המכניקה היא שהמשוואה הדיפרנציאלית שמתארת את התנועה במכניקה של ניוטון היא מסדר שני, כלומר גוזרים את המיקום פעמיים לפי הזמן. זה בערך כמו לחלק ב-$t^2$ (בעצם ב-$(\Delta t)^2$ ), גורם שלא מושפע מהיפוך הכיוון של הזמן (עבור Δt חיובי או שלילי תמיד מתקבלת תוצאה חיובית. לכן אם הזמן זורם קדימה או אחורה, התוצאה היא אותה). חשבו על כדורון קטן שניצב על ראש הר. בשלב כלשהו משחררים אותו והוא מתחיל להתגלגל למטה. מהירותו עולה עם הזמן עד שהוא מגיע לקרקעית והוא ממשיך לנוע הלאה על המישור. אם נסריט את הסרט הפוך, נראה גוף שנע על המישור במהירות גבוהה, מגיע לתחתית ההר ומתחיל לטפס. מהירותו יורדת עם הזמן עד שהוא מגיע לראש ההר ונעמד שם. זו ממש תמונת ראי (על ציר הזמן) של המסלול שתיארתי קודם. זו משמעותה של ההפיכות בזמן של המכניקה הניוטונית.
המסקנה היא שלפי המכניקה הניוטונית אם יש לנו מיקום ומהירות של גוף ברגע זמן מסוים, אנחנו יכולים לדעת את מיקומו ומהירותו בכל רגע זמן עתידי (וגם בעבר), כלומר את כל המסלול באופן חד ערכי. זו תמצית הדטרמיניזם שעולה מהמכניקה הניוטונית. מסלול של גוף שמתנהל לפי המכניקה הניוטונית גם נקבע חד ערכית על ידי מצבו העכשווי והוא גם הפיך (רוורסיבילי) בזמן.

**הכיפה של נורטון**

נורטון היה מעצב כיפות ידוע במאה שערים. שמו ניתן לו לזכר שני זקניו, נורה וטוני זצוקללה"ה, מחשובי העדה דחסידי סאטמר דהתם. יום אחד בעודו יושב וחולם בחנותו, התגלתה אליו סבתו נורה ז"ל בחלום, והורתה לו לעצב כיפה חדשה בסימטריה גלילית, שזוהי צורתה (זהו כמובן חתך, והוא אותו חתך בכל הכיוונים):




חתך של כיפת נורטון כשהציר המאונך הוא Z (הגובה, שמסומן כאן ב-h) והמאוזן הוא הציר האופקי. שני המרחקים הללו נמדדים ביחידות של $\frac{2g^2}{3b^4}$.

נורה דנן אפילו נתנה לנורטון את הנוסחה של מתאר הכיפה, שהייתה כמובן בקואורדינטות גליליות (כיאה לכיפה שצורתה נראית אותו דבר בכל הכיוונים):

(3) $Z = \frac{2b^2}{3g}\ r^{3/2}\ \ ;\ \ 0 < r < \frac{g^2}{b^4}$

b הוא קבוע כלשהו ו-g הוא תאוצת הכובד (מספר שערכו בערך 9.8).[1] נורה הסבירה לו ש-r אינו המרחק המאוזן מציר Z אלא המרחק הגאודזי, כלומר המרחק שעוברים מראש הכיפה לאורך הכיפה עצמה כלפי מטה. המרחק הגאודזי מראש הכיפה עד למטה הוא $r = \frac{g^2}{b^4}$ (שימו לב שבציור הציר המאוזן הוא X ולא r, כלומר זהו חתך. אנחנו מתייחסים לזה ככיפה תלת ממדית כש-r הוא המרחק הגאודזי מהשיא שלה). כעת תוכלו להבין שרוחב הכיפה הוא כמובן 2, ביחידות שמתוארות בתחתית הציור.

נורטון כמובן שחה בחומר (בחיידר שלו דתולדות אברהם יצחק, נוסחאות בקואורדינטות גליליות היו חומר יסוד של כיתה גן), ומיד בנה את הכיפה האמורה והציבה בחלון הראווה של חנותו. או אז נקלע לחנותו של נורטון דנן אליהו הנביא. הוא הניח כדורון נקודתי בדיוק בקודקוד הכיפה. נורטון שהיה בקיא טובא במכניקה של ניוטון ציפה לאחת משתיים: או שהכדורון יישאר לעמוד שם בראש הכיפה לנצח (להנך דסבירי להו דאפשר לצמצם בידי שמים – ראו בכורות יז ע"ב) או שיתחיל מיד לגלוש במורד הכיפה (להנך דסבירא להו דאי אפשר לצמצם בידי שמים). ואכן הכדור עמד שם כשעה חדא, ויצאה בת קול ואמרה: אפשר לצמצם בידי שמים. אלא דנורטון קשיא ליה מהא דאיכא חיכוך בהך כיפה ומיד שלף אליהו מכיסו נייר פלא ושייף את כל הכיפה עד דלית בה חיכוך כלל (הדא הוא דאמרי אינשי: תיכו – תשבי ישפשף כיפות וחיכוכים). לאחר מכן הניח שוב את הכדור למעלה, וראה זה פלא, הכדור המשיך לעמוד. אדהכי והכי כמעט נמנו וגמרו דאפשר לצמצם בידי שמים, אלא שלפתע פתאום בלי שום התרעה מוקדמת החל הכדור להתגלגל אט אט למטה.

בית המדרש נסער כולו, נצחו אראלים וענום המצוקים, אך לא נשבה ארון הקודש. נטו השמים ואמת המים פרחה באוויר, ויושבי ביהמ"ד סערו. אותו כדורון אזל דלא כמאן: דלמ"ד אפשר לצמצם היה עליו לעמוד לתמיד, ולשיטה שאי אפשר לצמצם היה עליו להתגלגל מיד. ויהי הדבר לפלא עד עצם היום הזה. נורטון הנבוך פרסם ברחבי קרתא קדישתא דירושלם שכל מי שיפתור את החידה הוא ייתן לו בתו לאישה ויירש את חנותו (אלא אם ישרפוה ליסטים בעוון עיסוק בחכמות חיצונות רח"ל). והכיפה נותרה למעצבה ולא נמכרה לאיש עד שנשכחה מלב כל.

לאחר שנים רבות איקלע לחנותיה דנורטון קשישא חכם אחד, ומצא פתר הדבר (ומאז נקרא שמו פטר הגדול). הלה שלף מאמתחתו ספרא דמכניקע (נספח לתרגום ליידיש של ספר **איל משולש** מתלמיד הגר"א, אשר כל רז לא אניס ליה), וכתב את החוק השני של ניוטון למקרה זה. בהתחשב בעובדה שהכוח הפועל על הגוף הוא רק הגרביטציה והנורמל של הכיפה (כזכור, אין חיכוך). התנועה היא כמובן בכיוון המשיקי לכיפה (וקי"ל דהכוח בכיוון ההוא יוצא $b^2\sqrt{r}$), ומטבע הדברים המשוואה הזאת היא עם סימטריה גלילית (אין תלות בזווית). על כן זכינו לדין זה:

(4) $\ddot{r} = b^2\sqrt{r}$

זוהי משוואה דיפרנציאלית שפתרונה ייתן לנו את המרחק הגאודזי של הכדורון מראש הכיפה כפונקציה של הזמן. כזכור, כדי להגדיר את המסלול בכל זמן, עלינו להוסיף תנאי התחלה. במקרה שלנו הכדורון מתחיל כשהוא עומד על ראש הכיפה, ולכן תנאי ההתחלה הם:

$$r(t=0) = 0\ \ ;\ \ \dot{r}(t=0) = 0$$

מתברר שלמשוואה הזאת יש שני פתרונות. הראשון הוא:

(5a) $r(t) = 0$

זהו פתרון שבו החלקיק נותר לעמוד על ראש הכיפה כל הזמן ולא זז.
אבל יש לה גם פתרון שני:

(5b) $r(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t \le T \\ \frac{1}{144}[b(t-T)]^4 & ;\ t \ge T \end{cases}$

[1] אפשר היה לכתוב כאן סתם קבוע K כלשהו. נוח יותר לבטא אותו עם g ולשם כך עלינו להכניס קבוע פרופורציה b.

הפתרון הזה אומר שהחלקיק מחכה בעמידה על ראש הכיפה זמן כלשהו T, ומשם והלאה הוא מתחיל להתגלגל למטה. הזמן T שרירותי, כלומר יכול להיות כלשהו. במילים אחרות, בעצם יש כאן אינסוף פתרונות (עבור כל ערך של T, וגם הפתרון הראשון הוא פשוט השני כאשר $T \to \infty$). כלומר הכדורון יכול להחליט להתגלגל בכל רגע שעולה בדעתו, ואין שום דבר שקובע לו מתי לעשות זאת, אם בכלל. יתר על כן, בגלל הסימטריה הגלילית הוא יכול להתגלגל למטה בכל כיוון שעולה בדעתו, כלומר בכל זווית שירצה.

אפשר לראות את ריבוי הפתרונות דרך תכונת הרוורסיביליות של המכניקה הניוטונית. נניח שהחלקיק נע במהירות כלשהי מלמטה לכיוון הכיפה, והוא מטפס עליה ומאט. אפשר לכוונן את המהירות ההתחלתית שלו כך שכשהוא יגיע לפסגה הוא בדיוק יעצור שם. זה כמובן יקרה מכל כיוון שהוא יגיע לכיפה באותה מהירות, בגלל הסימטריה הזוויתית. אם נחזור לרוורסיביליות של המכניקה, זה אומר שאם נסריט את הסרט הפוך נקבל פתרון שקול לבעיה, כלומר אינסוף פתרונות שבהם הכדורון מתגלגל לכל הכיוונים האפשריים ומתחיל לעשות זאת בכל זמן T שירצה.

כך גם תוכלו להבין מדוע לא ניתן לנסח את הפרדוקס הזה עבור כיפה כדורית רגילה. בכיפה כדורית אם הכדורון מגיע אליה במהירות שתגרום לו לעצור בדיוק למעלה, יהיה עליו לעלות ולהאט עוד ועוד עד שיעצור על הכיפה. מתברר שבכיפה כדורית התהליך הזה לוקח לו זמן אינסופי, ולכן ההיפוך שלו לא יכול להתחיל. כדורון שיעמוד על ראש כיפה כדורית לא יתחיל לנוע כלפי למטה אף פעם כי תחילת התנועה היא אחרי זמן אינסופי (זה מקביל לפתרון הראשון של הבעיה שלנו: $T \to \infty$). מה שמייחד את הכיפה של נורטון הוא שזמן העלייה של הכדורון מלמטה עד שהוא נעצר בראש הכיפה הוא סופי, ולכן הפתרונות ההפוכים הם קבילים ומתרחשים בזמן סופי. זוהי הסיבה לכך שהיינו צריכים להגדיר את הצורה דווקא באופן המיוחד שבנוסחה (3).

ומשעה שחזה נורטון בהך פלא, נטל את הכיפה הקסומה וחזה בפלא נוסף: מרן בעל חידושי הרי"ם כבר חזה כל זאת ברוח קדשו (וי"א שקיבלה במסורת מהקוצקר), וכך נולדה כיפת גור עם הבלעטל באמצעה.

**לעצם הבעייתיות: מבט ראשוני**

עד כאן חישוב מתמטי. אלא שכיפת נורטון נחשבת כפרדוקס ולא כסתם מקרה מוזר. הסיבה לכך היא שהיא סותרת את הנחת הדטרמיניזם של המכניקה של ניוטון. אם מתבוננים בפתרונות הללו רואים שבמצב נתון עם תנאי התחלה מוגדרים היטב, מתקבלים כמה וכמה פתרונות. הכדורון יכול להתחיל להתגלגל בכל זמן וכיוון שירצה (או לא להתגלגל כלל). מה אם כן גורם לו לבחור זמן וכיוון? מאומה. זה נקבע שרירותית, סוג של הגרלה. נמצא שלמסלול תנועת הכדורון אין סיבה, וגם לא לעצם תחילת התנועה. הוא פשוט מחליט פתאום לנוע בלי שהשתנה מאומה בסביבתו והוא בוחר כיוון בלי שיש סיבה כלשהי להעדיף את הכיוון הזה על אחרים. נראה כאילו שיש לו רצון חופשי או סתם מנגנון של הגרלה. זה סותר את האופי הדטרמיניסטי של המכניקה הניוטונית שפגשנו למעלה.

בטור 601 עמדתי על כך שכאשר אנחנו פגשים פרדוקס עומדות בפנינו שלוש אפשרויות: 1. למצוא טעות במהלך הלוגי. 2. לוותר על אחת ההנחות שלנו. 3. לוותר על המסקנה שנסתרת על ידי הפרדוקס (כלומר לראות בו הוכחה בדרך השלילה לכך שטעינו). הערתי שם שיש גם אפשרות רביעית: 4. להישאר בצ"ע, כלומר לא לוותר על ההנחות ולא על העמדה שנסתרה על ידי הפרדוקס, ולהניח שיש כאן פגם בטיעון למרות שבינתיים איננו מוצאים אותו.

כיצד כל זה מתישם לגבי המקרה שלנו? האפשרות הראשונה כנראה אינה נכונה. מדובר בחישוב מתמטי והוא נראה נכון לגמרי. האפשרות השנייה פירושה לוותר על חוקי ניוטון במכניקה. אלא שזו אינה אופציה, שכן גם אם חוקי ניוטון אינם נכונים הפרדוקס בעינו. שימו לב שהבעיה לא נוצרה כתוצאה מניסוי, שלכאורה מראה לנו שהתיאוריה שלנו אינה נכונה. הבעיה נוצרה מתוך יישום התיאוריה עצמה. כלומר התיאוריה עצמה פרדוקסלית ולא הפיזיקה. היא אמורה להיות דטרמיניסטית והיא לא. האפשרות השלישית היא לוותר על הנחת הדטרמיניזם. הרי את הדטרמיניזם שאבנו מתוך חוקי ניוטון (בגלל שהם מתוארים על ידי משוואה דיפרנציאלית), והדוגמה הזאת מראה לנו ששאבנו לא נכון. מתברר שיש מקרים שבהם חוקי ניוטון אינם דטרמיניסטיים למרות שהם אינם אלא משוואה דיפרנציאלית. האפשרות הרביעית לא נראית כאן רלוונטית, שכן לא רק שלא מצאנו פתרון אלא שהוכחנו שאין ולא יכול להיות

פתרון. לכאורה אין מנוס אלא לוותר על הנחת הדטרמיניזם. הטעות שלנו היא בכך שחשבנו שחוקי ניוטון הם דטרמיניסטיים. מתברר שהם לא.

**האם באמת הדטרמיניזם הוא תוצר של חוקי ניוטון?**

אני חושב שמה שכל כך מטריד בפרדוקס נורטון הוא שהדטרמיניזם אינו רק תוצר של התבוננות בחוקי ניוטון. אם זה היה המצב, אז באמת מתבקש היה לוותר עליו. טעינו, שכן מתברר שמחוקי ניוטון לא עולה דטרמיניזם. הבעיה שלנו כאן היא שעקרון הסיבתיות קובע ששום דבר לא מתרחש ללא סיבה, ולא רק חוקי ניוטון. הדטרמיניזם יוצא מהעיקרון האפריורי הזה ולא מחוקי ניוטון. חוקי ניוטון רק מבטאים, בין היתר, גם אותו. גם אם היה מתברר שחוקי ניוטון אינם נכונים עדיין הייתי מצפה שהחוקים הנכונים יהיו דטרמיניסטיים.
אם כן, הוא הדין בענייננו. גם אם הייתי מוכן לקבל את המסקנה שחוקי ניוטון אינם דטרמיניסטיים, המסקנה הייתה צריכה להיות שכעת אי אפשר כבר לראות בהם תיאור סביר וקביל להתנהגותם של עצמים פיזיקליים, שכן זו נדרשת להיות סיבתית ודטרמיניסטית. דברים לא מתרחשים ללא סיבה, ולכן הכיוון והזמן שבו "בוחר" הכדורון שלנו להתגלגל, צריכים להיות תוצאה של סיבה כלשהי ולא להיבחר שרירותית. במילים אחרות, נראה שמה שהניסוי המחשבתי הזה מראה לנו הוא שחוקי ניוטון אינם תיאור נכון של הטבע הפיזיקלי שכן הוא צריך להיות דטרמיניסטי.
ניתן כמובן לטעון שתורת הקוונטים מלמדת אותנו שזה אינו נכון. מתברר שדווקא ישנן התרחשויות פיזיקליות ללא סיבה. אם כן, עקרון הסיבתיות אינו באמת כללי ומחייב, וייתכנו מצבים פיזיקליים שבהם קורים דברים ללא סיבה. ואם בקוונטים כך, למה שלא יהיה אותו דבר במכניקה קלסית?! ובכל זאת, התחושה היא שמשהו כאן בעייתי. עקרון הסיבתיות כן אמור להיות נכון לפחות במישור הקלסי. איכשהו זו לא תוצאה אפריורית שאינה ניתנת לבחינה אמפירית (שהרי תורת הקוונטים מערערת עליה), אבל בכל זאת איננו מוכנים לוותר עליה בהקשרים קלסיים. למה? סוג של אינטואיציה, שגם אם אינה כללית ולא איבדנו את האמון שלנו בה. בשולי דבריי אעיר שגם ביחס לתורת הקוונטים אין הסכמה שהיא אכן לא סיבתית. ישנן פרשנויות שונות (למשל שהיא סיבתית אבל לא לוקלית, או שיש משתנים חבויים ששולטים בתופעות הקוונטיות רק שהם אינם מדידים ולכן איננו רואים את השפעתם הסיבתית וכדומה). האינטואיציה הסיבתית-דטרמיניסטית שלנו חזקה מאד, ואם בתורת הקוונטים איננו מוותרים עליה כל כך מהר, קל וחומר ביחס למכניקה הקלסית.
טוב, אז מה אפשר לעשות עוד? לכאורה הכל כאן סגור ואין שום מוצא. המסקנה ההכרחית היא שאם איננו מוותרים על עקרון הסיבתיות אזי בהכרח חוקי ניוטון אינם מתארים באופן מלא את הטבע.

**הפתרונות המקובלים**

בערך **ויקיפדיה** שאליו לינקקתי למעלה, ישנה טענה שהכוח אינו גזיר ב-r=0, וכשאין לו רציפות ליפשיץ לא מתקיים הכלל של יחידות הפתרון למשוואה הדיפרנציאלית. זה כמובן לא פותר את הבעיה, אלא רק אומר שחוקי ניוטון אכן אינם תמיד דטרמיניסטיים. אבל למעלה כבר ראינו שזה אינו פתרון לבעיה האמתית שלנו. זה לכל היותר אומר שחוקי ניוטון לא מתארים את הטבע, שכן הם אינם דטרמיניסטיים.
בהמשך השרשור שבו עלתה הבעיה, אריה העלה כמה נקודות שמנסות לפתור אותה. באחת מהן הוא טען שהניתוח שראינו לא מצביע על כך שקורה משהו ללא סיבה פיזיקלית, אלא שבמערכת הזו בכל רגע יכול לקרות משהו כזה. הוא אפילו הוסיף שזה יכול להיות פתח לטענה שיש מרווחים בטבע (בניגוד למה שאני נוהג לכתוב), ולכן יש מקום לרצון חופשי או מעורבות אלוהית גם במסגרת חוקי הטבע. אך עניתי שם שזה אינו פתרון, שכי הניסוי מראה שיכול לקרות משהו כזה, ודי בכך כדי לערער על הדטרמיניזם של חוקי המכניקה. לא צריך שזה יקרה בפועל. חוצמזה, למה להניח שזה לא יקרה בפועל אם עקרונית זה יכול לקרות?!
עוד הוא הביא שם שנורטון עצמו טען שאין פרדוקס אם מנסחים אחרת את החוק השני של ניוטון: בכל רגע שלא פועל כוח אין תאוצה וכשיש כוח יש תאוצה. אם נתבונן בכדורון שלנו, עד הזמן שהגוף מתחיל לנוע ($t<T$) תאוצתו אכן אפס (וגם מהירותו אפס), ואז באמת גם לא פועל עליו כול. ברגע $t=T$ עדיין תאוצתו אפס (בגלל הצורה של העקום) אבל עדיין לא פועל עליו כוח כי הוא עדיין נמצא בראש הכיפה. אבל לאחר מכן (כאשר $t>T$) יש תאוצה, אלא שאז כבר פועל עליו כוח. אם כן, אין שום נקודה בזמן

שבה החוק מופר, ולכן אין פרדוקס. אבל הניסוח הזה לא מסביר כיצד הגוף עובר מראש הכיפה לנקודה שליד שבה כבר פועל עליו כוח. משהו כאן עדיין לא מתיישב.

**הפתרון שלי: אין מרובע מששת ימי בראשית**

כשראיתי את הפרדוקס, המחשבה הראשונית שלי הייתה שהבעיה היא בצורה של הכיפה. פשוט לא יכולה להיות בטבע כיפה כזאת. אמנם צורת הכיפה רציפה וגזירה, אבל רק פעם אחת. אין שם נגזרת שנייה מוגדרת. משמעות הדבר היא שאם תציירו את הגובה כפונקציה של המרחק האופקי X תקבלו שפיץ ב-X=0. זה אומר שהשיפועים מימין ומשמאל לשפיץ הם שונים והנגזרת השנייה תהיה לא רציפה (אין לה ערך יחיד באותה נקודה).

הטענה היא שאין בטבע אי רציפויות ושפיצים. ולכן לא ייתכן שתהליך כזה יתרחש במציאות שלנו. במילים אחרות ניתן לומר שכדי לדבר על אובייקט בעל צורה כזאת צריך להתייחס למרחקים ברזולוציה גבוהה מאד (מוחלטת), מה שלא ניתן לעשות. במציאות אם יורדים לרזולוציה מוחלטת אין בכלל משמעות לרציפויות שכן אנחנו בעולם שבו יש אטומים בדידים זה לצד זה. יתר על כן, ברזולוציות כאלה שולטת תורת הקוונטים ולא המכניקה הקלסית ולכן כל הניתוח כאן אינו נכון. במילים אחרות, המכניקה הקלסית לא עוסקת בסוג כזה של צורות.

לזה אולי כיוון נורטון (האמתי, לא ההוא ממאה שערים), כשאמר שהכוח והתאוצה תמיד תואמים. תהיתי שם כיצד הוא יסביר את המעבר של הכדורון מראש הכיפה לנקודה בצד שבה הכוח כבר קיים? התשובה היא שאין מעבר כזה כי צורה כזאת לא יכולה להיות קיימת. הטבע הוא רציף. לכן גם למדונו המתמטיקאים שלא נכון לתאר קו רציף כאוסף צפוף של נקודות שניצבות זו לצד זו (זוהי [תכונת הצפיפות](#) של הרצף). ומכאן שאי אפשר לדבר על מעבר מהנקודה שבראש הכיפה לנקודה הכי קרובה אליה בצד. תכונת הצפיפות מלמדת אותנו שאין נקודה הכי קרובה. אבל זה בדיוק אומר שצורה כזאת שבה אנחנו מדברים על נקודה מתמטית מוגדרת בדידה אחת אינה יכולה להימצא במציאות. במציאות יש רק רצף. כפי שהערתי לאריה, ההסבר הזה של נורטון הוא בעצם ביטוי לאי הרציפות של הצורה.

מעניין שעניין זה מוזכר כבר בתלמוד הירושלמי (מעשרות פ"ה ה"ג. ראו גם ב**תוספתא** מעשרות פ"ג):

***רבן שמעון בן גמליאל אומר: אין מרובע מששת ימי בראשית.***

אמנם המדרש ב**מכילתא** בשלח יד, א, כותב שבמאכלים יש מרובע. בפשטות הכוונה היא שאדם יכול לעשות צורות מרובעות, רק הטבע לא עושה 'שפיצים'. בטבע הדברים מעוגלים (כלומר רציפים וגזירים). זה יכול להיות קשור לכך שאי אפשר לצמצם בידי שמים גם אם בידי אדם אולי כן. דברים שנוצרים במקרה ולא במכוון הם לעולם עגולים. כך דרכו של הטבע. כדי ליצור שפיץ, דרושה כוונה יזומה של אדם. מעשיו של בשר ודם יפים יותר, לידיעת נורטון ידידנו ממאה שערים.

אמנם יש לדון בזה שכן הצורה עצמה היא רציפה וגזירה. האם הטבע לא עושה גם שפיצים בנגזרת? כלומר האם לא ייתכן שתיווצר בטבע צורה שהיא אמנם מעוגלת, אבל הנגזרת השנייה שלה לא קיימת? תחושתי היא שלא. בטבע הכל אמור להיות רציף, הפונקציות והנגזרות. המשתנים שבהם אנחנו בוחרים להשתמש אינם חשובים לטבע. זו רק בחירה שלנו. מבחינתנו ברגע שיש גודל לא רציף כלשהו זה לא אפשרי (הרי יכולנו לבחור להשתמש דווקא בו בניסוח המתמטי שלנו, ואז הייתה כאן אי רציפות כבר בנגזרת הראשונה).[2]

אני חושב שהפתרון שמדבר על רציפות ליפשיץ בעצם מתכוון לזה. הטענה אינה שהכוח אינו גזיר אלא שהצורה אינה גזירה פעמיים. היצור הטבעי כאן הוא הצורה ולא הכוח שנוצר על ידה.

**בחזרה לפרדוקס**

סוף דבר, נראה שאפשר להישאר עם ההנחה הסיבתית-דטרמיניסטית במכניקה הקלסית, וביחד עם זה לא לוותר על חוקי ניוטון כתיאור של המציאות. חוקי ניוטון מתארים במדויק את המציאות (הקלסית) וזה לא סותר את הדטרמיניזם ששורר בה, אם כי אותם חוקים עצמם שיופעלו על מצבים שלא יכולים להופיע במציאות אינם בהכרח דטרמיניסטיים. גם זה חידוש לא קטן, אבל את זה אפשר לעכל. זהו

---

[2] אמנם הצורה למעלה מוגדרת על ידי התלות של Z ב- r, ולא בדקתי את התלות של Z ב-X. ייתכן ששם יש אי רציפות כבר בנגזרת הראשונה. אינני חושב כך, אבל זה בין כה וכה לא חשוב. אם אין בטבע נגזרת שנייה לא רציפה, אז ודאי שאין בטבע אי רציפות כזאת שבתלות במשתנה אחד תופיע בנגזרת הראשונה ובשני היא תהיה בשנייה. לטבע לא אכפת באלו משתנים אני משתמש. הוא אוהב רציפות וגזירות וזהו.

בעצם חידוש מתמטי ולא פיזיקלי (אני חושב שמתמטיקאים בכלל לא יתרגשו מזה. ברור שאם לא מתקיימים התנאים אין יחידות של הפתרון. הבעיה מעיקרא נוצרה רק בגלל המשמעויות הפיזיקליות של העניין).